

VISOKO REZOLUCIONA ENTROPIJOM OGRANIČENA POLARNA KVANTIZACIJA

Perić¹ H. Zoran, Jovković² D. Jelena

¹ Elektronski fakultet u Nišu

² Elektronski fakultet u Nišu

I UVOD

Vektorska kvantizacija (VQ) je moćna i efikasna metoda koja je u širokoj upotrebi u aplikaciji kodiranja govora i slike. Kvantovanje skalara ima specifičnu osobinu da želje mogu imati različite veličine istog oblika, jer one predstavljaju intervale na realnoj osi. Pri kvantovanju vektora svaka želja u npr. dvodimenzionalnom prostoru, pored različite veličine može imati i različit oblik. Ta sloboda predstavlja prednost kvantovanja vektora u odnosu na kvantovanje skalara.

Problem konstrukcije entropijom ograničenog kvantizera svodi se na određivanje kvantizera minimalnog izobličenja D među svim kvantizerima $\{(R_i, m_i) | 1 \leq i \leq N\}$ čija

entropija $-\sum_{i=1}^N P(r \in R_i) \log_M(P(r \in R_i))$ ne prelazi

unapred zadatu vrednost H, $H > 0$. Prednost entropijskog kodovanja ogleda se u tome što se bez povećanja brzine prenosa postiže korišćenje većeg broja nivoa za kodovanje. Za kvantizer se kaže da je optimalan ako je izobličenje (distorzija) minimalno za svaki od L nivoa kvantizera. Međutim, za istu entropiju i distorziju bolji je onaj kvantizer koji to postiže manjim brojem kvantnih nivoa.

Brzina kao funkcija greške $R(D)$ za diskretne izvore bez memorije odgovara definiciji kapaciteta kanala u teoriji kodiranja kanala gde je kapacitet kanala maksimalna brzina ispod koje je eksponenat greške slučajnog kodiranja pozitivan. U stvari, dok je kapacitet kanala jednak maksimumu srednje uzajamne informacije, $R(D)$ se javlja kao minimum srednje uzajamne informacije pri postojećim ograničenjima mere greške. Minimizacijom entropije m_i , u stvari, vršimo minimizaciju distorzije, odnosno nalazimo $R(D)$ koje se može primeniti u praksi.

Do sada su se razvila uglavnom dva pristupa teoriji visoke rezolucije [1], neformalni, uz jednostavne aprosimacije, i rigorozni, gde su formule granica striktno izvedene. U ovom radu će biti prikazana razlika između ova dva pristupa na primeru polarne kvantizacije ograničene entropijom, a tako će biti dat odnos skalarnu i polarne kvantizacije, bilo da je ona ograničena entropijom, bilo da je optimalna po distorziji.

Na osnovu dosadašnjih rezultata [2] da optimalni vektorski kvantizer ograničen entropijom mora zadovoljiti konstantne gustine tačaka, mi određujemo metod za konstrukciju polarnog kvantizera kroz odgovarajući broj faznih podela za i-ti nivo, kao i za optimalni broj nivoa.

II ASIMPTOTSKA ENTROPIJOM OGRANIČENA POLARNA KVANTIZACIJA

Ovde razmatramo uniformni polarni kvantizer koji se karakteriše sa L amplitudskih nivoa i P_i rekonstrukcionih nivoa faze na rekonstrukcionom nivou amplitude m_i , $1 \leq i \leq L$. Da bi minimizirali distorziju pristupamo sledećoj analizi:

Najpre načinimo particiju opsega amplitude $[0, r_L]$ u prstenove amplitude koristeći L nivoa odluke r_i , $1 \leq i \leq L$ ($0 < r_1 < r_2 < \dots < r_L < r_{L+1} = r_{max}$). Amplitudski rekonstrukcioni nivoi odgovarajuće zadovoljavaju ($0 < m_1 < m_2 < \dots < m_L$). Zatim, načinimo particiju svakog amplitudskog prstena u P_i faznih subparticija. Neka su $f_{i,j}$ i $f_{i,j+1}$ dva fazna nivoa odluke, i neka $\psi_{i,j}$ bude j-ti fazni rekonstrukcioni nivo za i-ti amplitudski prsten, $1 \leq j \leq P_i$. Tako su

$$f_{i,j} = (j-1)2^p / P_i; \quad j = 1, 2, \dots, P_i + 1; \quad i$$

$$y_{i,j} = (2j-1)P / P_i.$$

Amplitudski nivoi odluke i rekonstrukcioni nivoi su dati kao:

$$r_i = (i-1)\Delta, \quad 1 \leq i \leq L+1$$

$$m_i = (i-1/2)\Delta, \quad 1 \leq i \leq L$$

U isto vreme, fazni nivoi odluke, i rekonstrukcioni nivoi su dati sa :

$$f_{i,j} = \frac{2^p(j-1)}{P_i}, \quad 1 \leq j \leq P_i + 1$$

$$y_{i,j} = \frac{P(2j-1)}{P_i} \quad 1 \leq j \leq P_i.$$

Velicina koraka Δ određuje ceo sistem kao visokorezolucioni. Kod uniformne kvantizacije je baš ta karakteristika glavni parametar ali je za vektorsku kvantizaciju potrebna odrednica više, tj. gustina tačaka.

Posmatraće se samo granularna distorzija imajući u vidu srednjekvadratnu grešku (mse) [3], koja se može izraziti kao:

$$mse = \frac{\Delta^2}{12} + \sum_{i=1}^L \frac{m_i P^{2r_i+1}}{3P_i^2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r f(r) dr \quad (1)$$

Asimptotska jednačina se može izvesti iz opšte ako se

primeni aproksimacija $\int_{r_i}^{r_{i+1}} r f(r) dr \approx m_i f(m_i) \Delta$, gde je

$\Delta = r_{i+1} - r_i$. Aproksimacije se odnose na to da je zanemarena distorzija prekoračenja te da se gustina na malom intervalu Δ može smatrati konstantnom.

Poznato je da minimalna distorzija za vektorsku kvantizaciju entropijom ograničenu treba da zadovolji uslov konstantne gustine tačaka:

$$\mathbf{I}(r_i, \mathbf{y}_{ij}) = \text{const.}$$

Drugačije rečeno:

$$\mathbf{I}(r_i, \mathbf{y}_{ij}) = \frac{1}{N \cdot S(r_i, \mathbf{y}_{ij})}$$

kvantizaciju

$$S(r_i, \mathbf{y}_{ij}) = \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2) \mathbf{P}}{P_i}$$

Iz ovog uslova i uslova da je ukupan broj tačaka

$$\sum_{i=1}^L P_i = N, \text{ sledi da je:}$$

$$P_i = \frac{Nm_i}{\sum_{j=1}^L m_j}$$

Kada se izvrši minimizacija granularne distorzije (1) i njena optimizacija dobija se izraz za optimalan broj nivoa L_{opt} :

$$L_{opt} = \sqrt{\frac{N}{\mathbf{P}}}$$

Zamenom ovog izraza u (1) dobija se jednačina granularne distorzije po dimenziji:

$$D_{g\text{-po-dimenziji}}^{2D} = \frac{1}{2} mse = \frac{r_{\max}^2 \mathbf{P}}{12N}$$

Da bi smo uporedili postupak polarne entropijom ograničene kvantizacije i skalarnu entropijom ograničene kvantizacije pronađemo zavisnost entropije od distorzije.

Zavisnost entropije od distorzije se može iskazati za slučaj skalarnu kvantizaciju kao:

$$H_{1D} = 2 \sum_{i=1}^{\sqrt{N_1}} P(m_i) \log \frac{1}{P(m_i)} \quad (2)$$

gde je $P(m_i) \approx f(m_i) \Delta_L^{1D}$, $\Delta_L^{1D} = \frac{2r_{\max}^{1D}}{\sqrt{N_1}}$ a funkcija

$$\text{raspodele je: } f(r, \mathbf{f}) = \frac{1}{2\mathbf{P}s^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2s^2}} = \frac{f(r)}{2\mathbf{P}}$$

Skalarna distorzija je:

$$D_g^{scal} = \frac{r_{\max}^2}{3N_1} \quad (3)$$

U slučaju zavisnosti entropije od distorzije u dve dimenzije razmatramo dva podslučaja: 1) entropijom ograničena distorziju i 2) optimiziranu distorziju. U oba podslučaja funkcija raspodele ima isti oblik:

$$f(r, \mathbf{f}) = \frac{1}{2\mathbf{P}s^2} \cdot e^{-\frac{r^2}{2s^2}} = \frac{f(r)}{2\mathbf{P}}$$

1)

$$H_{2D\text{-po-dimenziji}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{P_i} P_{ij} \log \frac{1}{P_{ij}} \quad (4),$$

gde je verovatnoća data kao

$$P_{ij} = \frac{1}{2\mathbf{P}} m_i e^{-\frac{m_i^2}{2} \Delta_L \Delta \mathbf{f}(i)}$$

$$\Delta_L = \frac{r_{\max}}{L}, \quad \Delta \mathbf{f}(i) = \frac{2\mathbf{P}}{P_i} \quad i \quad f(m_i) = \frac{1}{2\mathbf{P}} m_i e^{-\frac{m_i^2}{2}}$$

$$\text{gde je } m_i = \left(\frac{2i-1}{2} \right) \Delta_L$$

Distorzija po dimenziji je ovde data kao:

$$D_{g\text{-po-dimenziji}}^{2D} = \frac{1}{2} mse = \frac{r_{\max}^2 \mathbf{P}}{12N_2} \quad (5),$$

optimalni broj nivoa je $L_{opt} = \sqrt{\frac{N_2}{\mathbf{P}}}$, a

$$r_{\max} = 2\sqrt{\log N_2}$$

2) Kada je u pitanju optimalna distorzija [3], izraz za entropiju je isti ali se razlikuju jednačine za optimalni broj

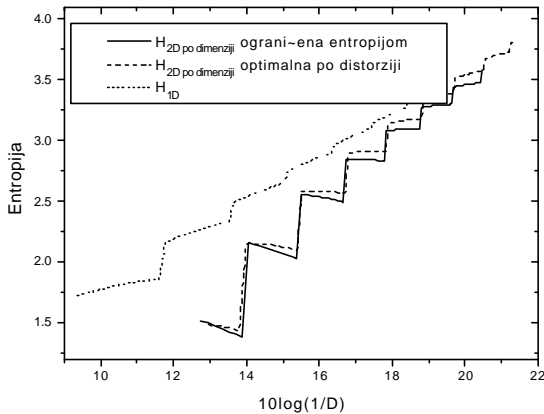
$$\text{nivoa i distorziju, tj.: } L_{opt} = \frac{r_{\max}}{\sqrt[4]{108(1 - e^{-\frac{r_{\max}^2}{6}})^3}} \sqrt{\frac{N_2}{\mathbf{P}}}$$

$$P_i \approx \frac{N_2 m_i r_{\max}}{3(1 - e^{-\frac{r_{\max}^2}{6}}) L} e^{-\frac{m_i^2}{6}} \quad a$$

$$D_g^{opt} = \frac{\sqrt{3\mathbf{P}}}{2N_2} (1 - e^{-\frac{r_{\max}^2}{6}})^{3/2} \quad (6).$$

Poznato je da su dobri rezultati ostvarivi uniformnim skalarnim kvantizerima i entropijskim kodiranjem visokog reda [1]. Međutim, to jesu ekstremni zahtevi, tako da praktični sistemi teže da nađu kompromis između dimenzije kvantizera i reda entropijskog kodovanja.

Rezultati ovakvog poredjenja se najbolje mogu ilustrovati grafikom koji daje zavisnost entropije od distorzije po dimenziji.



Slika 1. Zavisnost entropije od distorzije u slu-aju skalarne kvantizacije, kvantizacije ograni-ene entropijom i optimalne po distorziji.

Na osnovu grafika ali i analiti-ki, kao {to }e kasnije biti pokazano, mo`e se zaklju-iti da bolje rezultate daje polarna kvantizacija ograni-ena entropijom, -ak najbolje, u slu-aju kada je $N_2=N_1$. Tada je za istu entropiju $D^{2D} < D^{1D}$. Krajnji zaklju-ak bi bio da je za istu distorziju najbolje koristiti uniformnu polarnu kvantizaciju ograni-enu entropijom.

III ANALITI^KI PRIKAZ ZAVISNOSTI DISTORZIJE OD ENTROPIJE

U ovom delu rada da}emo prikaz analiti-kog prora-una za entropiju dvodimenzionalnog izvora upore|uju}i na{a zapa`anja sa rezultatima iz literature [2]. Pokaza}emo i razliku izme|u pribli`ne i ta-ne zavisnosti entropije od distorzije. Polazimo od jedna-ine (4), koja se nakon nekoliko transformacija mo`e zapisati kao:

$$H_{2D} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{P_i} \frac{1}{2\mathbf{p}} m_i e^{-\frac{m_i^2}{2}} \left[\begin{array}{c} ld \frac{1}{2\mathbf{p}} e^{-\frac{m_i^2}{2}} \\ + ld \frac{1}{m_i \Delta_L \Delta \mathbf{f}(i)} \end{array} \right] \Delta_L \Delta \mathbf{f}(i)$$

tj.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{P_i} \frac{1}{2\mathbf{p}} m_i e^{-\frac{m_i^2}{2}} ld \frac{1}{2\mathbf{p}} e^{-\frac{m_i^2}{2}} \Delta_L \Delta \mathbf{f}(i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{P_i} \frac{1}{2\mathbf{p}} m_i e^{-\frac{m_i^2}{2}} (ld \frac{N}{\Delta_L L^2 \mathbf{p}}) \Delta_L \Delta \mathbf{f}(i)$$

Zbog same karakteristike visoke rezolucije suma prelazi u integral:

$$H_{2D} = \frac{1}{2} \int_0^{r_{\max}} \int_0^{2\mathbf{p}} \frac{1}{2\mathbf{p}} r e^{-\frac{r^2}{2}} ld \frac{1}{2\mathbf{p}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\mathbf{f} + \frac{1}{2} ld \frac{N}{r_{\max}^2 \mathbf{p}} \left(\int_0^{r_{\max}} \int_0^{2\mathbf{p}} \frac{1}{2\mathbf{p}} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\mathbf{f} \right)$$

Izraz u poslednjoj zagradi je pribli`no jednak 1 tako da prethodni izraz dobija jednostavan zapis:

$$H_{2D} \approx h(G) + \frac{1}{2} ld \frac{N}{r_{\max}^2 \mathbf{p}} \quad (7)$$

gde je $h(G) = \frac{1}{2} ld 2\mathbf{p}e$ Gausova diferencijalna entropija. Dakle,

$$H_{2D} \approx \frac{1}{2} ld 2\mathbf{p}e + \frac{1}{2} ld \frac{N}{r_{\max}^2 \mathbf{p}}$$

Iz (5) se dobija: $\frac{r_{\max}^2 \mathbf{p}}{N_2} = 12 D_g^{2D}$, uz $N_2=N$.

Dalje je: $H_{2D} \approx \frac{1}{2} ld 2\mathbf{p}e + \frac{1}{2} ld \frac{1}{12 D_g^{2D}}$.

Rezultat Gish-Pierce [4] za polarnu kvantizaciju za 2D je:

$$H_{2D} = \frac{1}{2} ld \frac{2\mathbf{p}e}{12 D_g^{2D}} \quad (8)$$

a za skalarnu kvantizaciju koja je entropijom ograni-ena

$$H_{1D} = \frac{1}{2} ld \frac{2\mathbf{p}e}{12 D_g^{2D}}$$

Zavisnost izme|u N_2 i N_1 kada su entropije za 1D i 2D jednake ($H_{1D} = H_{2D}$) se mo`e prikazati upore|ivanjem ove dve entropije -ime se dolazi do zaklju-ka:

$$N_1 = \frac{4}{\mathbf{p}} N_2$$

tj. da za istu entropiju u 1D i 2D je potrebno 1.273 putavi{e ta-aka pri skalarnoj kvantizaciji nego pri polarnoj kvantizaciji koja je ograni-ena entropijom. Naravno da manji broj ta-aka automatski zna-i i bolje karakteristike, manju kompleksnost i jednostavniju realizaciju.

Ako bi smo optimizirali ukupnu distorziju (a ne samo granularnu), za slu-ajeve 1D i 2D, va`i }e $r_{\max}^{2D} < r_{\max}^{1D}$ tako da je zapravo $N_1 > 1.27 N_2$.

Izraz za pribli`nu distorziju u 2D dobijamo kao:

$$D_g^{2D} \approx \frac{1}{12} e^{-2(H_{2D}-h(G))} \quad (9)$$

Mo`e se zaklju-iti da je:

$$H_{2D} < h(G) + \frac{1}{2} ld \frac{2\mathbf{p}e}{12 D_g^{2D}}$$

te smo na ovaj način iskazali približnu vrednost za entropiju u 2D. Ta-analitički oblik se dobija u sledećih nekoliko koraka tj. polazi se od:

$$H_{2D} = h(G) - \frac{1}{2} \int_{r_{\max}}^{\infty} \int_0^{2p} \frac{1}{2p} r e^{-\frac{r^2}{2}} ld \frac{1}{\frac{1}{2p} r e^{-\frac{r^2}{2}}} dr d\mathbf{f} +$$

$$+ \frac{1}{2} ld \frac{1}{12D_g^{2D}} \left(1 - e^{-\frac{r_{\max}^2}{2}} \right),$$

(to bi se moglo zapisati kao

$$H_{2D} = h(G) - h_1 + \frac{1}{2} ld \frac{1}{12D_g^{2D}} \left(1 - e^{-\frac{r_{\max}^2}{2}} \right), \text{ gde je}$$

$$h_1 = \frac{ld 2p}{2} + \frac{ld e}{2} \left[\left(\frac{r_{\max}^2}{2} + 1 \right) e^{-\frac{r_{\max}^2}{2}} - 1 \right].$$

Zaključuje se da je $h_1 > 0$ i izraz za H_{2D} se može jednostavnije zapisati kao :

$$H_{2D} = h(G) - h_1 + \frac{1}{2} ld \frac{1}{12D_g^{2D}} l,$$

gde je l ustvari: $l = 1 - e^{-\frac{r_{\max}^2}{2}}$.

Tada je ta-analitički izraz koji prikazuje zavisnost granularne distorzije u 2D (po dimenziji) od odgovarajuće entropije:

$$D_g^{2D} = \frac{1}{12} 2^{\frac{2}{l}(H_{2D} - h(G) + h_1)} \quad (10)$$

IV ZAKLJUČAK

Entropijom ograničena kvantizacija je i danas vrlo aktuelna, čak i za najjednostavnije slučajeve [5]. U ovom radu dati su izrazi za optimalni broj nivoa L_{opt} i optimalni broj faznih podela P_{opt} za i -ti nivo optimalnog polarnog MSE kvantizera ograničenog entropijom kao i odgovarajuća jednačina za granularnu distorziju u 2D, po dimenziji D_g^{2D} po dimenziji.

Prikazana je jednostavna asimptotska analiza zavisnosti entropije od distorzije za slučajeve entropijom ograničene skalarnе kvantizacije, za polarnu kvantizaciju optimalnu po distorziji, kao i za optimalnu polarnu kvantizaciju ograničenu entropijom.

Prvenstveno je i kompletna analitička zavisnost $H(D)$ i u slučaju manje formalne, približne analize, kao i slučaju striktnih ograničenja. Predloženim postupkom smo pokazali da je moguće dostići granicu Gish-Pirce-a (8) koristeći manji broj kvantnih nivoa po dimenziji.

LITERATURA

- [1] Robert M. Gray, David L. Neuhoff, 'Quantization', *Transaction on Information Theory*, Vol. 44, No. 6, October 1998.
- [2] Allen Gersho, 'Asymptotically Optimal Block Quantization', *Transaction on Information Theory*, Vol. IT-25, No. 4, July 1979.
- [3] Zoran H. Perić, Jelena D. Jovković, 'Optimal Uniform Polar Quantization', *Zbornik radova TELSIKS 2001*, September 2001.
- [4] Herbert Gish, John N. Pierce, 'Asymptotically Efficient Quantizing', *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-14, No. 5, September 1968.
- [5] Andras Gyorgy, Tamas Linder, 'Optimal Entropy-Constrained Scalar Quantization of a Uniform Source', *Transactions on Information Theory*, Vol. 46, No. 7, November 2000.
- [6] Roger C. Wood, 'On Optimum Quantization', *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-15, No. 2, March 1969.

Abstract: In this paper simple and complete asymptotical analysis is given for constructing polar MSE entropy constrained quantizer. According to those specifications, all main equations are shown in order to provide optimal number of levels (L_{opt}), optimal number of the phase partitions on level (P_{opt}), and, especially, relation between entropy and distortion ($H(D)$) for scalar entropy constrained quantizer, optimal polar entropy constrained quantizer, and for polar quantizer constrained by optimal distortion.

HIGH RESOLUTION ENTROPY-CONSTRAINED POLAR QUANTIZATION, Zoran H. Perić, Jelena D. Jovković

