

FRAKTALNA I MULTIFRAKTALNA ANALIZA SIGNALA

Branimir Reljin¹, Irini Reljin²

¹Elektrotehnički fakultet - Beograd, ²Viša tehnička PTT škola - Beograd

I UVOD

Šta je *dimenzija*? Kako *izmeriti* neki objekat? Pitanja deluju trivijalno jer više od 2000 godina živimo u svetu koji poznaje i koristi pravila Euklidske geometrije. Navikli smo da objekti imaju sledeće Euklidske (ili, topološke) dimenzije: tačka je bez dimenzije, tj. $D_E=0$, glatka linija ima jednu dimenziju – dužinu, $D_E=1$, ravna površina ima dve dimenzije – dužinu i širinu, $D_E=2$, a telo ima tri dimenzije, $D_E=3$. Oblik i/ili pozicija nekog objekta se, uobičajeno, opisuju ovim topološkim dimenzijama. Dimenzije se mogu izmeriti i brojeano opisati ukoliko ih poredimo sa nekim usvojenim uzorkom (etalonom) mere. Ili, analitički gledano, dužina linije (luka) se određuje krivolinijskim integralom, a veličina neke površine primenom površinskog integrala. Ovako definisane postavke Euklidske geometrije su predstavljale osnovni koncept koji je korišćen u dizajnu, konstrukciji i prikazivanju svih ljudski stvorenih objekata tokom niza vekova.

Međutim, prirodni objekti nisu pravilnih oblika i, strogo govoreći, ne podležu zakonima Euklidske geometrije. Na primer, ako posmatramo list papira, on ima dimenziju $D_E=2$. Ako taj list zgužvamo u lopticu, dobija se telo (zapremina) dimenzije $D_E=3$. Međutim, ako pustimo papir da se delimično ispravi, dobija se nova struktura koja nije ni telo ni površina. Ova struktura zauzima neki prostor. Koja je dimenzija te strukture? Negde između 2 i 3! To zvuči čudno, ali je tačno. To je koncept tzv. *fraktalne*, ili *necelebrojne*, dimenzije, kojim se proširuju mogućnosti opisivanja složenih oblika.

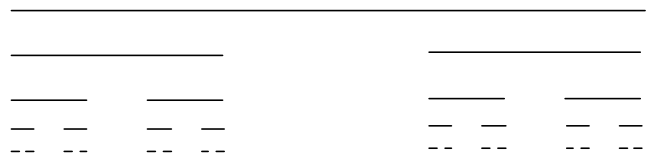
Fraktalna geometrija je uvedena u prirodne nauke pre tridesetak godina. U svom poznatom radu "How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension", objavljenom 1967. godine u časopisu *Science Magazine*, Benoit Mandelbrot, poljski matematičar i fizičar, prvi put je uveo pojam fraktala, što je kasnije upotpunio i sistematizovao [1]. Tu je pokazao da je koncept dužine besmislen ukoliko se želi izmeriti neki nepravilan objekat kao što je morska obala – dužina zavisi od izbora jedinice mere. Analitički posmatrano, linija morske obale nije diferencijabilna u svim tačkama, tako da krivolinijski integral nije definisan.

Termin *fraktal* (lat.adj. *fractus* – izlomljen, prelomljen) je Mandelbrot koristio da bi opisao nepravilnu strukturu raznih prirodnih objekata i fenomena, kao što su oblaci, izgled reljefa, razne prirodne teksture, turbulencije u atmosferi, kretanja u ekonomiji, i drugo. Centralna filozofska tema fraktalne geometrije je da priroda – mada naizgled složena – pokazuje jednu fundamentalnu osobinu obično poznatu kao *samo-sličnost* (*self-similarity*). Naime, ma kako kompleksan bio oblik i/ili dinamičko ponašanje sistema, ukoliko neko pogleda pažljivije i dovoljno maštovito, može naći oblike na jednoj skali koji liče na one na drugim skalama. Pored već navedenog primera morske obale, mnogi prirodni objekti iskazuju takva svojstva. Posmatrajmo, na primer, krošnju drveta. Ako odlomimo jednu granu, njena struktura je slična,

samo umanjenjih dimenzija, kao što je struktura cele krošnje. Ako se od grane odlomi jedna grančica, opet njena struktura liči na prethodne. Slično se može zaključiti i za građu nervnog sistema, sistema krvotoka, izgled reljefa, itd. Uobičajeno korišćen decimalni merni sistem je, takođe, samosličan: jedan metar ima 10 decimetara; jedan decimetar 10 centimetara, itd. Struktura je stalno ista, ali u različitim skalama.

Mada se Mandelbrot smatra 'ocem' fraktalne geometrije, on je, zapravo, genijalno objedinio neka prethodna saznanja koja su se pojavila od sredine 19. veka. Pomenimo neka od njih. *Theodor Weierstrass* (1815-1897) je pokazao da može postojati kontinualna kriva koja ni u jednoj tački nije diferencijabilna, *Felix Hausdorff*-a (1869-1942) je prvi uveo pojam *necelebrojne* dimenzije, koja je veća od topološke dimenzije, zatim, *Georg Cantor* (1845-1918) je definisao beskonačan skup tačaka u jediničnom intervalu [0,1] koji iskazuje fraktalna svojstva – tzv. *Kantorov skup* (*Cantor Set*), *Helge von Koch* i *Waclaw Sierpinski* su definisali pravila na osnovu kojih se mogu konstruisati fraktalne krive ili objekti (*Koch curve* i *Sierpinski carpet*), itd.

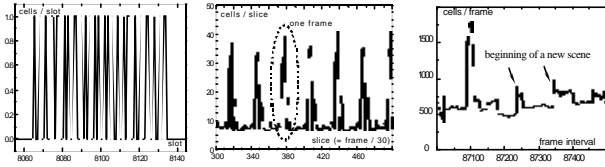
Veliki broj fraktalnih struktura se može veštački generisati primenom relativno prostih pravila, tako što se rezultati posle svake iteracije vraćaju nanovo u istu proceduru. Tako dobijene strukture se u literaturi referišu i kao *čudovišne krive* (*monster curves*), jer iskazuju svojstvo da su beskonačne složenosti – pri bilo kojem uvećanju imaju istu strukturu. Radi ilustracije, navedimo poznati primer Kantorovog skupa. Posmatrajmo liniju dužine $d=1$ – prvi red na slici 1. Zatim od te linije uklonimo njenu srednju trećinu, dužine $d/3$, čime dobijamo dve odvojene linije – drugi red na slici 1, pa za te linije ponavljamo postupak. Postupak se može beskonačno ponavljati, a u svakom narednom koraku replicira se prethodna slika, ali na sve manjim i manjim skalama [2],[3].



Slika 1. Konstrukcija Kantorovog skupa: prva četiri koraka konstrukcije.

Veštački generisani objekti, primenom precizno definisanih algoritama, kao što je slučaj Kantorovog skupa, iskazuju stroga fraktalna svojstva. Prirodni objekti i pojave, međutim, ne iskazuju tako stroga fraktalna svojstva, čak i kada jesu samo-slični. Prirodni objekti i pojave mogu imati statističku samo-sličnost. Na primer, struktura morske obale, izgled reljefa ili oblaka, struktura nekih bioloških sistema ili signala, iskazuju samo-slična svojstva, ali u raznim skalama oblik nije sasvim isti, mada jeste sličan. U tim slučajevima se govori o *multifraktalima*. Savremen telekomunikacioni

saobraćaj, na primer, iskazuje takvo svojstvo, što je ilustrovano na slici 2, kao i razne geofizičke i meteorološke pojave, biomedicinski signali, statistički podaci o populaciji stanovništva, itd. Multifraktalni parametri, kojima se mogu opisati takve pojave, mogu se iskoristiti u klasifikaciji objekata [4], a time omogućiti nov pristup u medicinskoj dijagnostici, na vrlo brz i jednostavan način [5].



Slika 2. Ilustracija multifraktalnog svojstva signala. Posmatra se broj ćelija (paketa) digitalizovane verzije filma “Rat zvezda” u različitim skalama: broj ćelija po jediničnom vremenskom intervalu (*slot*), broj ćelija po isečku (*slice*) slike, broj ćelija po slici (*frame*).

Korišćenje fraktalne geometrije u simuliranju prirodnih fizičkih objekata, pojava i sistema, a zatim njihova kompjuterska vizualizacija, predstavljaju jedan pravac rada u ovoj oblasti [3]. Inverzan problem predstavlja veliki izazov fraktalne geometrije. Pokušaj izdvajanja karakteristika modela koji najbolje opisuje fizički proces, uz pomoć nekog dobro definisanog i robusnog parametra, kao što su fraktalni ili multifraktalni parametri, je polje u kojem ove oblasti imaju značajnu ulogu. Poslednjih godina razvijeni su mnogi algoritmi za izdvajanje karakterističnih fraktalnih ili multifraktalnih parametara iz posmatranog skupa podataka. To nalazi konkretnu primenu u prepoznavanju oblika, obradi, kompresiji, analizi i sintezi slika [2]-[11], analizi i predikciji savremenog telekomunikacionog saobraćaja [12]-[23], kao i drumskog saobraćaja [24], analizi meteoroloških podataka [25]-[32], analizi biomedicinskih signala i oblika [33]-[38] kao i raspodele ljudske populacije [39], itd.

II OPISIVANJE FRAKTALNIH I MULTIFRAKTALNIH SVOJSTAVA SIGNALA

U Uvodu smo naveli osnovna svojstva fraktalnih i multifraktalnih oblika ili signala. Ovde ćemo izložiti neke mogućnosti za analitičko opisivanje takvih struktura.

Fraktalni oblici ili signali su karakterisani sledećim svojstvima [2],[3]:

1. **Nemaju karakterističnu dužinu.** Na primeru morske obale smo ukazali na ovo svojstvo fraktalnih oblika. Uzimanjem sve manje i manje jedinice mere dobijali bismo sve veću i veću izmerenu dužinu fraktalne strukture. Razlog je taj što se oblik strukture beskonačno ponavlja ukoliko strukturu posmatramo sa sve veće blizine. Saglasno tome, proizilazi da ne možemo povući tangentu na fraktalnu liniju – dakle, fraktalna linija nije diferencijabilna. Za razliku od nje, glatka kriva uvek ima konačnu (karakterističnu) dužinu. Jedino, uzimanjem sve manje i manje jedinice mere, mi bismo samo preciznije izmerili dužinu takve krive.
2. **Poseduju svojstvo samo-sličnosti.** U bilo kojoj skali posmatrano, fraktalni oblici su iste strukture. Ovo se svojstvo naziva i *svojstvo invarijantne skale*.
3. **Imaju necelobrojnu dimenziju,** veću od odgovarajuće topološke dimenzije nefraktalnog objekta.

Fraktalna dimenzija je osnovni analitički parametar za opisivanje struktura koje imaju tzv. skalirajuću simetriju. *Skalirajuća simetrija* podrazumeva samosličnost posmatranih objekata na promenljivoj skali uvećanja. Istorijski gledano, prvo uvođenje mere za popunjavanje prostora koja dopušta mogućnost necelobrojne dimenzije, dao je Felix Hausdorff [40] On je proučavao strukture nepravilnog oblika i definisao sledeće pravilo. Posmatrajmo ograničen skup S u n -dimenzionom Euklidskom prostoru. Zatim prekrivamo skup S konačnim podskupovima prečnika d_i . (Prečnik podskupa je najveće rastojanje između bilo koje dve tačke u skupu S .) Definišimo meru skupa S kao

$$H_e^D(S) = \inf_{d_i < \epsilon} \sum d_i^D$$

gde je $D > 0$ realna veličina. Granična vrednost H_e^D , kada ϵ teži nuli, jeste Hausdorff-ova mera skupa S . Vrednost D kada veličina H^D naglo menja vrednost sa ∞ na 0 kasnije je nazvana *Hausdorff-ovom* ili *Hausdorff-Besicovitch-evom* dimenzijom, D_H [2],[3].

Kasnije je izvedeno više načina [3] za određivanje fraktalne dimenzije. Za strukture koje su dobijene primenom strogo definisanih pravila, kao što su već pomenuti Kantorov skup, Kohova kriva, Sierpinski tepih, i slično, može se odrediti tzv. *dimenzija samosličnosti*, D_S , na sledeći način.

Za skup S koji je ograničen u Euklidskom n -dimenzionom prostoru kažemo da je samo-sličan ako je on unija N razdvojenih (nepreklapajućih) sopstvenih kopija, od kojih je svaka naredna skalirana skala faktorom $r < 1$ po svim dimenzijama prostora. Između navedenih veličina postoji sledeća veza

$$Nr^{D_S} = 1 \quad (1a)$$

odakle je dimenzija samosličnosti jednaka

$$D_S = -\frac{\ln N}{\ln r} \quad (1b)$$

Prema relaciji (1) za Kantorov skup ilustrovan na slici 1 se dobija

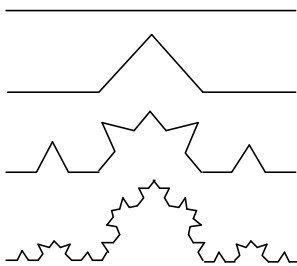
$$D_S = -\frac{\ln(2)}{\ln(1/3)} \cong 0,631$$

jer se ta struktura dobija tako što se $N=2$ dela (linije) ponavljaju na svakoj narednoj skali $r=1/3$ (reč je o tzv. trijadičkoj strukturi). Umesto polazne strukture (linije) strukture dobijene u narednim koracima imaju kvazi-tačkastu strukturu postavljenu u pravcu polazne linije. Fraktalna struktura dimenzije između 0 i 1 poznata je kao *fraktalna prašina*.

Za Kohovu krivu čiji je deterministički postupak generisanja ilustrovan na slici 3, dobija se za dimenziju sličnosti vrednost

$$D_S = -\frac{\ln(4)}{\ln(1/3)} \cong 1,262$$

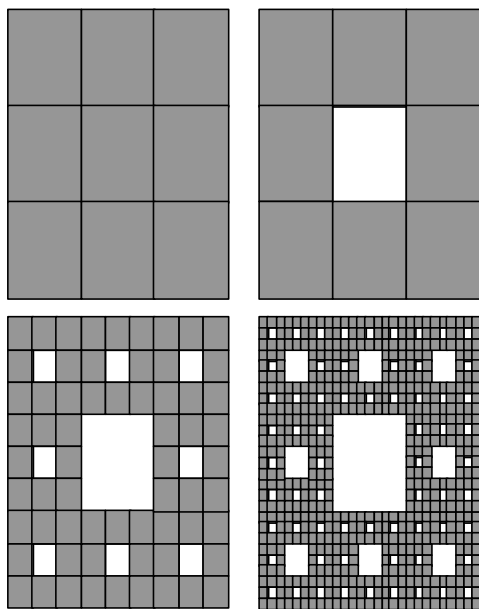
s obzirom da se ta struktura formira tako što se polazna linija (*inicijator*) topološke dimenzije 1 (prvi red na slici 3) skalira faktorom $r=1/3$, čime se dobija nova struktura, tzv. *generator*, sastavljena od $N=4$ delova, kao u drugom redu na slici 3, a zatim se postupak ponavlja. Umesto polazne linije koja ne zauzima prostor (ima topološku dimenziju 1) dobija se struktura koja zauzima sve veći i veći prostor, u narednim koracima konstrukcije objekta.



Slika 3. Konstrukcija Kohove krive: prva tri koraka.

Fraktalna struktura poznata kao Sierpinski tepih, može se formirati postupkom koji je ilustriran na slici 4. Polazna struktura je obojeni pravougaonik, kao na slici 4, topološke dimenzije 2. U narednom koraku se on deli na 9 jednakih delova tako što se obe dimenzije skaliraju faktorom $r=1/3$, a zatim se centralni deo izbacuje. Za svaki od preostalih $N=8$ delova se postupak ponavlja. Fraktalna dimenzija ovako dobijene strukture je

$$D_S = -\frac{\ln(8)}{\ln(1/3)} \cong 1,893.$$



Slika 4. Konstrukcija Sierpinski tepiha: prva tri koraka.

Fraktalne strukture dimenzije između 1 i 2 se nazivaju *fraktalnim signalima*. Strukture dimenzije između 2 i 3 nazivaju se *fraktalnim površinama* (fraktalnim slikama), a strukture dimenzije između 3 i 4 jesu *fraktalne zapremine*.

Da bismo uočili razliku između dimenzije fraktalnih objekata i 'standardnih' geometrijskih objekata, posmatrajmo sledeće primere na slici 5.

U prvom redu je prikazana linija (Euklidske dimenzije $n=1$), koja je izdijeljena na $N=3$ dela, dakle, korišćenjem skala faktora $r=1/3$. Fraktalna dimenzija dobijene strukture je, na osnovu relacije (1), jednaka

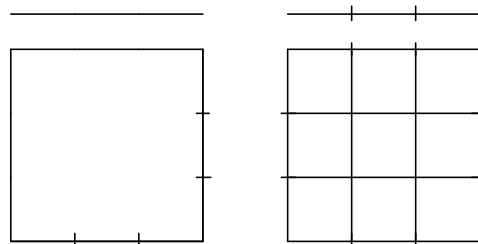
$$D_S = -\frac{\ln(3)}{\ln(1/3)} = 1$$

što je identično Euklidskoj dimenziji linije. Da smo nastavili postupak na svakom od dobijenih umanjenih delova (linija) dobili bismo identičnu vrednost – fraktalna i topološka dimenzija su identične. Struktura u drugom redu na slici 5 je kvadrat (Euklidske dimenzije $n=2$), koji je izdijeljen na $N=9$

delova tako što su obe dimenzije skalirane skala faktorom $r=1/3$. Fraktalna dimenzija dobijene strukture je, na osnovu relacije (1), jednaka

$$D_S = -\frac{\ln(9)}{\ln(1/3)} = 2$$

što je, i ovde, identično Euklidskoj dimenziji površine. Identično bi se dobilo i za trodimenzioni objekat – kocku, što nećemo ilustrovati. Mada su novodobijene strukture kao na slici 5 samo-slične u tim slučajevima se nije povećavala složenost polaznog objekta – znači, ovako generisani novi objekti nisu fraktalni. Dakle, možemo zaključiti da *fraktalni objekti iskazuju svojstvo samo-sličnosti dok obrnuto ne mora da važi*. Potsetimo se i primera decimalnog mernog sistema: on jeste samo-sličan, ali nije fraktalan.



Slika 5. Ilustracija određivanja fraktalne dimenzije 'standardnih' geometrijskih objekata.

Za fraktalne strukture koje nisu dobijene strogo definisanim pravilima, kao što su razne prirodne strukture i signali, fraktalna dimenzija se ne može odrediti kao dimenzija samosličnosti, na osnovu relacije (1). Postoje razne druge metode koje se mogu primeniti u tim slučajevima, a jedna od često korišćenih je tzv. *box-counting* metoda, ili metoda prekrivanja čime se određuje *dimenzija prekrivanja* (*cover dimension*). Metoda se zasniva na prekrivanju fraktalnog objekta mrežom bokseva – kvadrata, u slučaju jednodimenzionih (1D) signala kao što su vremenske serije, ili kocki, u slučaju dvodimenzionih (2D) signala, kao što su signali slike. Dimenzije ivice bokseva su ϵ . Zatim se određuje broj nepraznih bokseva, $N(\epsilon)$, dakle, broj bokseva koji prekrivaju posmatrani objekat. Rekurzivno se uzimaju boksevi različitih dimenzija i iz log-log dijagrama zavisnosti $N(\epsilon)$ od ϵ , dobija se fraktalna dimenzija D_B . U graničnom procesu, uzimanjem sve manjih ivica bokseva, broj bokseva, $N(\epsilon)$, postaje srazmeran sa ϵ^{-D_B} , gde je D_B *box-counting* dimenzija datog fraktala; dakle, dobija se

$$D_B = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon}. \quad (2)$$

Uočimo sličnost relacija (1) i (2), mada je postupak izračunavanja. *Box-counting* metod daje tačne procene za fraktalne dimenzije između 1 i 1.5 kod 1D signala i 2 i 2.5 kod 2D signala, a jednostavan je, te je izračunavanje brzo. Postoje i druge metode za izračunavanje fraktalnih dimenzija, npr. *korelaciona dimenzija*, *dimenzija kapacitivnosti*, *informaciona dimenzija* [3], što ovde nećemo analizirati.

Pored fraktalne dimenzije, za opisivanje fraktalnih (samo-sličnih) svojstava koriste se i drugi opisivači, npr. Hurst-ov indeks (H), koji se, takođe, može određivati na razne načine: npr., na osnovu R/S statistike, metodom periodograma, indeksa disperzije (IDC), itd. Može se uspostaviti veza između fraktalne dimenzije D i Hurst-ovog indeksa u obliku

$$D = D_E + 1 - H, \quad (3)$$

gde je D_E odgovarajuæa Euklidska dimenzija posmatranog signala ili objekta.

Generalno, za procese koji imaju $H=0,5$ kaæemo da su sluæajni (*random walk*) i to je odlika standardnog Braunovog kretanja, kada nema nikakve korelacije izmeðu inkrementalnih pomeraja haotiænog kretanja æestice. Ako je $H>0,5$ tada postoji pozitivna korelacija izmeðu inkrementalnih pomeraja: za inkrementalni pomeraj æestice u nekom trenutku $t=t_0$, $x(t_0)$, u narednom trenutku $t>t_0$ pomeraj æe imati sliænu tendenciju – iskazuje se svojstvo samosliænosti, utoliko izraæenije ukoliko je H bliæe jedinici. Ukoliko je $H<0,5$ korelacija je negativna – suprotan je karakter promene u narednom trenutku u odnosu na prethodni. Takav sistem ima tendenciju *oscilovanja*.

Napomenimo da se u nekim sluæajevima fraktalna dimenzija 2D objekata moæe (pribliæno) odrediti koristeæi metode razvijene za 1D sluæaj [41] uspostavljajuæi prostu relaciju izmeðu fraktalne dimenzije konture koja ograniæava površinu (što moæemo oznaæiti kao $D1$) i fraktalne dimenzije same površine ($D2$), dakle,

$$D2 \cong D1+1 \quad (4)$$

Ovaj princip je korišæen za odreðivanje profila reljefa na osnovu Landsat snimaka [41]. U radu [42] je ovaj metod proveravan na crno-belim slikama raznolikog sadræaja. Slike su analizirane kao 2D matrice, kada je raæunata ‘taæna’ 2D fraktalna dimenzija, D_{2D} , i kao 1D vektori (što odgovara skeniranim slici) kada je raæunata 1D fraktalna dimenzija, D_{1D} . Zatim je vršena procena 2D fraktalne dimenzije prema (4) kao $D2=D_{1D}+1$. U svim analiziranim sluæajevima procenjena dimenzija $D2$ nije odstupala za više od 1% u odnosu na ‘taænu’ fraktalnu dimenziju, D_{2D} , što je koristan rezultat s obzirom na daleko jednostavniju analizu 1D signala.

Posmatrajuæi prirodu uoæavamo da se veæina pojava ne moæe posmatrati samo preko krajnosti tipa: crno-belo, taæno-netaæno, toplo-hladno, 1-0, itd. Zbog toga se ovakvi aspekti ne mogu analizirati preko skupova, veæ preko uopštenijih matematiækih veliæina kojima mogu da se opišu nivoi u skali izmeðu krajnjih vrednosti. Te uopštenije veliæine se nazivaju *mere*. Na osnovu toga se i teorija samosliænosti proširuje sa skupova na mere, a takve, samosliæne, mere se nazivaju multifraktalima. Slobodnije reæeno, umesto jedne mere, μ , javlja se skup mera koje opisuju samosliænu pojavu. Na primer, ako se razmatra 2D signal kao što je signal slike u skali sivog, za definisanje mere se moæe koristiti amplituda signala u prostornom domenu. *Box-counting* metod nije pogodan za opisivanje multifraktala jer on daje samo vezu izmeðu broja nepraznih bokseva i veliæine bokseva, a ne uzima u obzir vrednost signala koji je obuhvaæen boksom. To bi, uprošæeno, odgovaralo brojanju novca a da pritom ne raæunamo sa vrednošæu pojedinih apoena. Za multifraktalne pojave uvodi se neka vrsta ‘teæine’ za svaki od bokseva.

Za karakterisanje multifraktala najpre se uvodi veliæina \mathbf{a} opisana sa

$$\mathbf{a} = \frac{\log \mathbf{m}(\text{box})}{\log \epsilon} \quad (5)$$

poznata kao *grubi Hölder-ov eksponent* [2],[43], gde je $\mu(\text{box})$ mera boksa a ϵ dimenzija veliæine boksa. Ovako definisane veliæina bi odgovarala fraktalnoj boks-dimenziji posmatrane mere. Za široku klasu sebi-sliænih mera pokazuje se da veliæina α uzima vrednosti iz intervala $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, sa $0 < \alpha_{\min} < \alpha_{\max} < \infty$. Vrednost parametra α je bliska

odgovarajuæoj fraktalnoj dimenziji posmatrane strukture, dakle, za 1D signale je raspoljena oko vrednosti 1, za 2D signale oko vrednosti 2, itd.

Zatim se posmatra frekvencijska raspodela \mathbf{a} na sledeæi naæin. Za svaku vrednost \mathbf{a} odredi se broj $N_{\epsilon}(\mathbf{a})$ bokseva ivice ϵ koji imaju grubi Hölder-ov eksponent jednak \mathbf{a} . Kako je ukupan broj bokseva ivice ϵ srazmeran sa ϵ^{-D_E} , gde je D_E Euklidska dimenzija boksa, verovatnoæa da se meðu boksevima naæe onaj sa grubim Hölder-ovim eksponentom α iznosi $p_{\epsilon}(\mathbf{a}) = N_{\epsilon}(\mathbf{a}) / \epsilon^{-D_E}$. Crtanje raspodele ove verovatnoæe ne bi dalo æeljeni rezultat, jer pri $\epsilon \rightarrow 0$ ova raspodela ne teæi graniænnoj vrednosti. Umesto toga uvodimo teæinske logaritme i posmatramo funkcije

$$f_{\epsilon}(\mathbf{a}) = -\frac{\log N_{\epsilon}(\mathbf{a})}{\log \epsilon} \quad (6)$$

ili

$$C_{\epsilon}(\mathbf{a}) = -\frac{\log p_{\epsilon}(\mathbf{a})}{\log \epsilon} \quad (7)$$

Kada $\epsilon \rightarrow 0$, obe funkcije, $f_{\epsilon}(\mathbf{a})$ i $C_{\epsilon}(\mathbf{a})$, teæe graniænim, dobro definisanim, vrednostima $f(\mathbf{a})$ i $C(\mathbf{a})$ [43]. Funkcija $f(\mathbf{a})$ je poznatija i æešæe se koristi [6]. Ako postoji $f(\mathbf{a})$, tada je u vaænosti veza

$$C_{\epsilon}(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) - D_E \quad (8)$$

Ovako definisana funkcija $f(\mathbf{a})$ oznaæava da za svako \mathbf{a} broj bokseva raste pri smanjenju ϵ , po zakonitosti $N_{\epsilon}(\mathbf{a}) \sim \epsilon^{-f(\mathbf{a})}$. Eksponent $f(\mathbf{a})$ je kontinualna funkcija od \mathbf{a} . U najjednostavnijim sluæajevima, grafik $f(\mathbf{a})$ ima oblik matematiækog simbola \cap , uobiæajeno nagnutog na jednu stranu. Vrednost $f(\mathbf{a})$ bi se, u slobodnijoj interpretaciji, mogla protumaæiti kao fraktalna dimenzija podskupa boksova dimenzije ϵ koji imaju grubi Hölder-ov eksponent \mathbf{a} kada $\epsilon \rightarrow 0$. Naime, kada ϵ teæi ka 0, poveæava se mnoštvo podskupova od kojih je svaki karakterisan posebnom vrednošæu \mathbf{a} i fraktalnom dimenzijom $f(\mathbf{a})$. Ovo je jedan od razloga za uvoðenje pojma multifraktala.

Postoji više naæina za odreðivanje funkcije $f(\mathbf{a})$. Jedan od metoda je metod momenata [43]. Ovaj metod daje taæan rezultat, ali je komplikovan za izraæunavanje. Nasuprot tome, A. Chhabra i R. Jensen su razvili jednostavniji i znatno precizniji metod za izraæunavanje spektra $f(\mathbf{a})$ neke multifraktalne strukture [44]. Postoje varijante izraæunavanja ove funkcije na osnovu geometrijskih pokazatelja i prema probabilistiækoj teoriji. Klasifikaciju spektara funkcije $f(\mathbf{a})$, pri multifraktalnoj analizi slika, dao je Levy Vehel [4], koji razmatra sledeæe sluæajeve:

- *Spektar Hausdorff-ovih singulariteta*, $f_h(\mathbf{a})$, koji daje dimenziju skupa taæaka koje imaju dato α . Time se dobija *geometrijski opis* raspodele singulariteta.
- *Spektar velikih devijacija*, $f_g(\mathbf{a})$, daje nam podatak o verovatnoæi da se naæe data vrednost α_n pri rezoluciji n . Znaæi, daje nam *probabilistiæki opis* raspodele singulariteta. Naæalost, i $f_h(\mathbf{a})$ i $f_g(\mathbf{a})$ se teško izraæunavaju na osnovu realnih podataka.
- *Leæ androv multifraktalni spektar*, $f(\mathbf{a})$, se relativno lako odreðuje jer razmatra *samo usrednjene veliæine*. Meðutim, cena za to je da $f(\mathbf{a})$, generalno, sadræi manje informacija jer je rezultat uvek konkavna funkcija.

Među ovim veličinama postoji uobičajena veza da je $f_h(\mathbf{a}) \leq f_g(\mathbf{a}) \leq f_l(\mathbf{a})$.

U multifraktalnoj analizi slika smatraćemo da je $f_h=f_g$ tako da možemo klasifikovati piksele prema odgovarajućoj vrednosti uređenog para $(\alpha, f(\alpha))$, kako u geometrijskom smislu (f_h), tako i u probabilističkom (f_g). Vrednost α daje LOKALNU informaciju o regularnosti tačke: za fiksnu meru (nivo sivog) svaka tačka slike je karakterisana nekom vrednošću parametra α . Na primer, tačke u slici (2D signalu) koje imaju $\mathbf{a} \cong 2$ jesu tačke gde je mera regularna, dakle, gde se ne dešavaju velike promene. Tačke sa $\mathbf{a} \neq 2$ označavaju područja "gde se nešto dešava" – neregularne oblasti. Na primer, tačke u slici gde je $\mathbf{a} \ll 2$ ili $\mathbf{a} \gg 2$ označavaju ili oblasti gde postoji veliki gradijent, ili oblasti diskontinuiteta u signalu ili njegovim izvodima.

Vrednost $f(\alpha)$ daje GLOBALNU informaciju o ponašanju skupa tačaka. Na primer, tačke na glatkoj konturi pripadaju skupu čija je dimenzija, $f(\alpha)$, bliska vrednosti 1, jer to odgovara Euklidskoj dimenziji glatke linije, dok tačke koje karakterišu homogenu oblast (površinu) imaju $f(\alpha) \cong 2$, itd. Probabilistička interpretacija $f(\alpha)$ odgovara činjenici da su tačke na homogenoj oblasti čest (frekventan) slučaj, dakle, moraju imati veću vrednost $f(\alpha)$; tačke ivice su redak slučaj, dok su šuškoviti još ređi slučaj. Ali, ako se detektuje suviše mnogo "tačaka ivice" to bi više odgovaralo homogenoj (ili teksturnoj) zoni, itd. Analiza slika sa fraktalnog stanovišta vršena je u radovima [4]-[11]. U radu [5] je opisan interesantan način primene (inverzne) multifraktalne analize u klasifikaciji mikroskopskih uzoraka ćelija tkiva. Slična analiza i klasifikacija medicinskih slika, primenom multifraktalnih parametara, izvršena je i u radu [11].

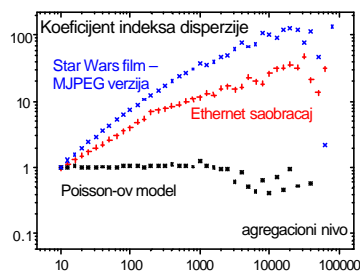
III FRAKTALNA I MULTIFRAKTALNA ANALIZA REALNIH 1D I 2D SIGNALA

Ovde ćemo, ukratko, izložiti neke moguće primene fraktalne i multifraktalne analize signala. Prikazaćemo, uglavnom, one rezultate koje smo proverili primenom različitih metoda za određivanje fraktalnih i multifraktalnih parametara 1D i 2D signala.

3.1. FRAKTALNE I MULTIFRAKTALNE METODE U ANALIZI I MODELOVANJU TELEKOMUNIKACIONOG SAOBRAĆAJA

Savremen telekomunikacioni saobraćaj iskazuje značajna fraktalna i multifraktalna svojstva, što je predmet intenzivnih proučavanja u svetu. Adekvatno modelovanje saobraćaja je veoma značajno radi ispravnog projektovanja mreža i obezbeđivanja maksimalno mogućeg protoka (bez zagušenja) i u uslovima naglog i eksplozivnog saobraćaja, koji je naročito izražen u sve prisutnijem multimedijalnom okruženju. Na slici 2 je ilustrovan fraktalni karakter savremenog telekomunikacionog saobraćaja na primeru digitalizovane verzije poznatog Spielbergovog filma "Rat zvezda". Reč je o MJPEG (Motion JPEG) varijanti za prikaz sekvenci slika, koja se danas više ne koristi, ali je ova digitalizovana verzija filma, koju 1993 godine pripremio M. Garrett, istorijski zaslužna za niz intenzivnih proučavanja karakteristika paketskog saobraćaja. Na slici 6 su prikazani IDC (indeks disperzije) dijagrami MJPEG verzije filma "Rat zvezda", Ethernet saobraćaja i saobraćaja modelovanog prema Puasonovoj raspodeli (što bi odgovaralo klasičnom telefonskom saobraćaju), a na slici 7 su prikazani

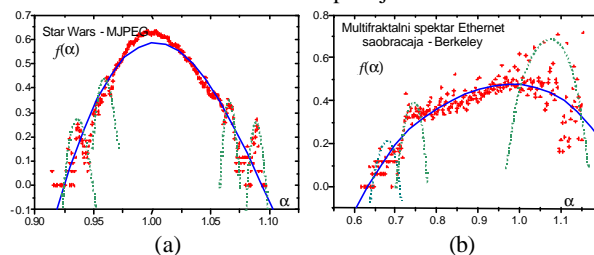
multifraktalni spektri MJPEG verzije filma i Ethernet saobraćaja. Na osnovu nagiba IDC dijagrama određeni su Hurst-ovi indeksi koji iznose: 0,44 za Puasonov model saobraćaja, 0,698 za Ethernet i 0,736 za MJPEG film "Rat zvezda".



Slika 6. Fraktalna analiza telekomunikacionog saobraćaja metodom indeksa disperzije.

Veza između nagiba IDC krive, k , i H-indeksa je

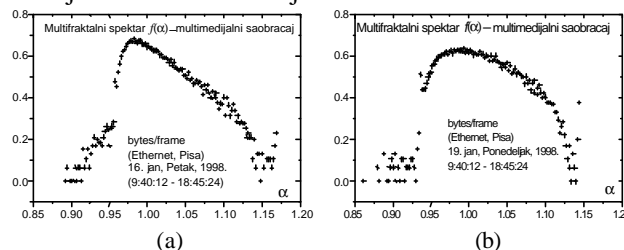
$$k = 2H - 1$$



Slika 7. Multifraktalni spektar digitalnih signala: a) MJPEG verzije filma "Rat zvezda", b) Ethernet saobraćaja u Berkeleyju.

Poređenjem dijagrama sa slikom 6 i 7 vidi se prednost multifraktalne (MF) analize nad fraktalnom. MF spektar Ethernet saobraćaja je znatno širi, što ukazuje na veću varijabilnost tog saobraćaja. Sličan zaključak se ne može izvesti na osnovu fraktalne analize.

Na slici 8 su prikazani multifraktalni spektri multimedijalnog ATM saobraćaja u Pizi (Italija), u mreži koja je pretežno namenjena telemedicini. Mada je reč o istoj mreži i saobraćaju koji je registrovan istog meseca i u isto doba dana (radno vreme), postoji znatno odstupanje dobijenih MF spektara. Mogući razlog je što se prvi dijagram odnosi na saobraćaj koji je sniman u petak (poslednji radni dan u nedelji) a drugi dijagram je za ponedeljak (prvi radni dan), kada je struktura saobraćaja različit.

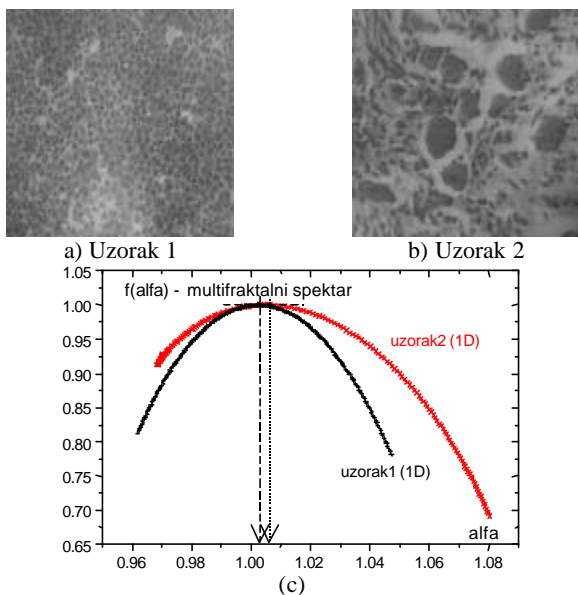


Slika 8. Multifraktalni spektri multimedijalnog Ethernet saobraćaja snimanog različitih radnih dana a pod istim ostalim uslovima.

3.2. PRIMENA MULTIFRAKTALNE ANALIZE U OBRADI SLIKA

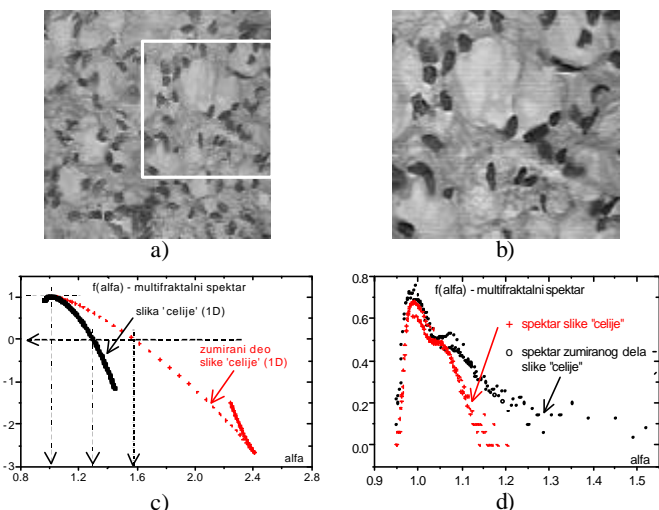
Multifraktalna analiza (MF) se može uspešno koristiti u obradi slika. Primeri dati na slikama 9 i 10 ilustruju primenu MF analize u klasifikaciji objekata. Korišćene su medicinske slike u skali sivog sa 256 nivoa, dimenzije 256x256 piksela, a analizirane su kao 1D vektori realnih brojeva (što odgovara skeniranim slikama). Simulacije su izvršene nad više medicinskih slika. Za MF analizu je korišćen program FALPHA iz programskog paketa MATPACK [44]-[45], koji je baziran na metodu Chhabra i Jensen-a [46].

Na slikama 9a i 9b su prikazani digitalizovani snimci mikroskopskih uzoraka, dobijenih u Institutu za patologiju i sudsku medicinu Vojnomedicinske akademije (VMA) u Beogradu. Uzorci, koji su respektivno nazvani "uzorak 1" i "uzorak 2", na prvi pogled pripadaju istom tipu. Deluje kao da je slika 9b zapravo zumiran deo slike 9a. Multifraktalna analiza, međutim, opovrgava ovo razmišljanje. Spektri $f(\alpha)$ ovih slika su prikazani na slici 9c. Uzorak 2 daje širi spektar, što ukazuje na veću varijabilnost signala slike, ali je značajnije to da taj uzorak ima maksimum spektra $f(\alpha)$ pri nešto većoj vrednosti α ($\alpha \approx 1,07$), za razliku od maksimuma spektra uzorka 1 (pri $\alpha \approx 1,02$). To sugeriše da je reč o različitim uzorcima. Da to jeste validan zaključak uverimo se na narednom primeru, slika 10.



Slika 9. Ilustracija primene MF analize u klasifikaciji uzoraka.

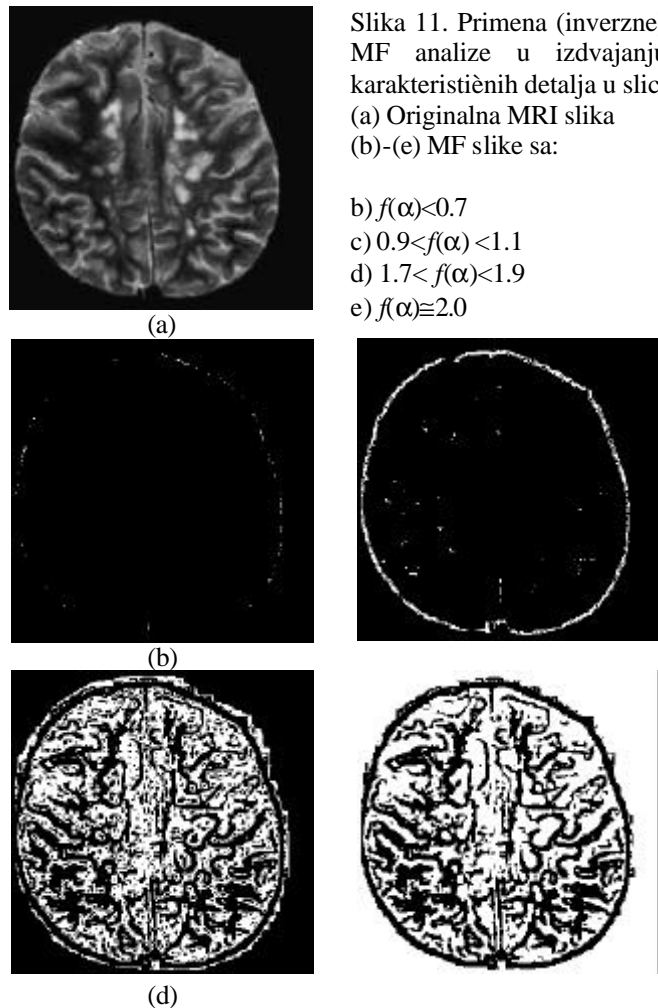
Na slici 10a i 10b su prikazani mikroskopski snimak nazvan "ćelije" i njegov zumirani deo (označen na slici 10a), a na slici 10c su prikazani spektri $f(\alpha)$ ovih snimaka. Mada je drugi spektar širi (veća je varijabilnost signala) sada su maksimumi spektara identični, pri istoj vrednosti $\alpha \approx 1,02$. Ovaj rezultat je proveren i na drugi način, izračunavanjem spektra $f(\alpha)$ metodom histograma [3], primenom programa koji je razvijen u radu [7], što je prikazano na slici 10d.



Slika 10. Klasifikacija mikroskopskih uzoraka primenom MF analize: a) originalan snimak, b) uvećani deo, c) i d) MF spektri.

Primitimo da se spektri dobijeni različitim metodama (slike 10c i 10d) razlikuju po apsolutnoj vrednosti, ali je oblik dijagrama, za pozitivne vrednosti $f(\alpha)$ veoma sličan. Doduše, razlike postoje jer metod [46], koji je primenjen u programu MATPACK [45] odgovara Ležandrovom spektru: daje (gotovo uvek) konkavnu krivu, ali se gube fini detalji, što je uočio L. Vehel [4]. Nasuprot tome, metod histograma, koji je korišćen za određivanje dijagrama na slici 10d, prema [7], daje više podataka, tj. manje glatku krivu, ali ne može da radi sa negativnim vrednostima funkcije $f(\alpha)$ jer koristi usrednjene podatke [47].

Ideja o primeni (inverzne) MF analize u izdvajanju karakterističnih detalja u slici izložena je u radu [4]. Na nizu slika 11 je overena ova mogućnost, prema [11].

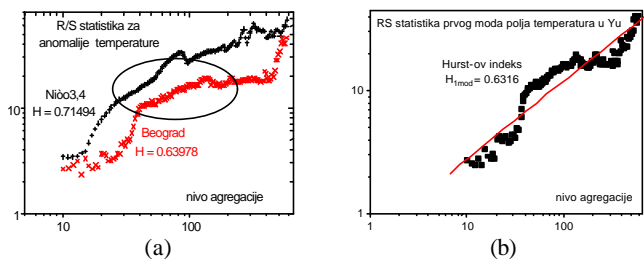


Slika 11. Primena (inverzne) MF analize u izdvajanju karakterističnih detalja u slici (a) Originalna MRI slika (b)-(e) MF slike sa:

- b) $f(\alpha) < 0.7$
- c) $0.9 < f(\alpha) < 1.1$
- d) $1.7 < f(\alpha) < 1.9$
- e) $f(\alpha) \approx 2.0$

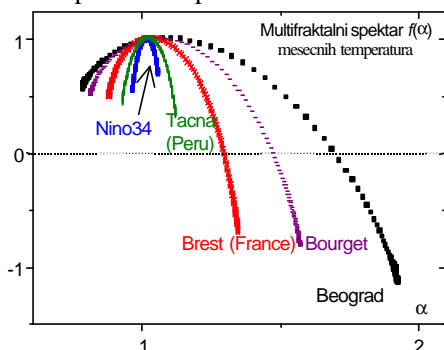
3.3. FRAKTALNA I MULTIFRAKTALNA ANALIZA METEOROLOŠKIH PODATAKA

Na slici 12a su prikazani R/S dijagrami anomalija temperaturnih serija za period od 48 godina (1951-1998) za područje centralnog Pacifika, poznatijeg kao Nino3,4, i za područje Beograda. Ovi dijagrami ukazuju na telekonekciju ovih temperatura, što je potvrđeno i drugim analizama koje su referisane u [28],[29],[32]. R/S statistika prvog moda temperatura u Jugoslaviji, slika 12b, pokazuje veliku sličnost sa odgovarajućim dijagramom za temperature u Beogradu, što ukazuje na dominantnost prvog moda temperatura u ovom području. To je pokazano i linearnom metodom analize pomoću empirijskih ortogonalnih funkcija [27]-[31].



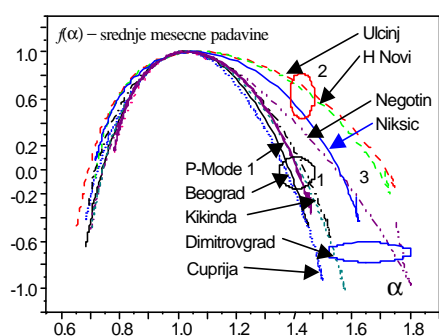
Slika 12. Fraktalna analiza temperatura za područje Nino3,4 i teritoriju Jugoslavije.

Varijabilnost promena temperatura je veoma ilustrativno prikazana multifraktalnim spektrima na slici 13 [28],[29]. Analizirane su temperaturne serije za područje Nino3,4, za zapadnu obalu Perua (grad Tacna), Brest na Atlantskoj obali Francuske, aerodrom Burže (kod Pariza) i Beograd. Primetno je da Nino3,4 a zatim Tacna iskazuju najmanju varijabilnost temperatura, a udaljavanjem od centralno-pacifičke regije dijagrami postaju sve širi, jer se javljaju drugi uticaji i varijabilnost temperatura se povećava.



Slika 13. Multifaktalna analiza temperatura za nekoliko karakterističnih područja na Zemlji.

Izvršena je i multifraktalna analiza padavina za područje Jugoslavije, što je prikazano na slici 14 [30]. Na osnovu multifraktalnih spektara se mogu lokalizovati određene regije koje su poznate po karakterističnom ponašanju padavina, na primer izrazita varijabilnost padavina u primorskoj oblasti, kao i singulariteti u Negotinskoj krajini.



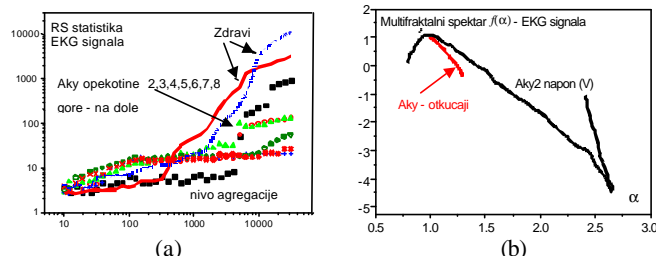
Slika 14. Multifaktalna analiza polja padavina za područje Jugoslavije.

Pokazuje se je multifraktalni spektar padavina u Beogradu veoma sličan spektru glavnog moda u polju padavina Jugoslavije. Dijagram ukazuje na postojanje klastera te da se može koristiti u klasifikaciji pojava.

3.4. FRAKTALNA I MULTIFRAKTALNA ANALIZA EKG SIGNALA

Fraktalna analiza se uspešno koristi i u biologiji i medicini. Ovde ćemo navesti same meke novije rezultate u primeni fraktalne i multifraktalne analize u medicini –

konkretno, u analizi EKG signala kod zdrave dece i dece sa oštećenjem kože usled opekotina [48]. Za fraktalnu analizu je korišćena R/S statistika, slika 14a, a multifraktalni spektri su prikazani na slici 14b. R/S dijagrami za zdravu decu daju vrlo veliki Hurst-ov indeks, što je očekivani rezultat. Ista vrsta analize EKG signala dečaka (Aky) sa opekotinama velikog stepena 2,3,,8 dana posle povređivanja, pokazuje slabije izražena fraktalna svojstva. EKG signali i zdravih i obolelih osoba su multifraktalni. Znatne negativne vrednosti u spektru su posledica konačnog skupa vrednosti tog signala [47].



Slika 14. Fraktalna i multifaktalna analiza EKG signala.

ZAKLJUČAK

Značaj i prednost fraktalne i multifraktalne analize (MFA), u odnosu na "klasičan" način analize signala leži u načinu na koji se razmatra neregularnost. MFA pokušava da izdvoji informaciju direktno iz singulariteta. Konkretno, na osnovu određene vrednosti $f(\alpha)$, mogu se razdvojiti tačke nehomogenosti u originalnom signalu [4],[11].

Pokazuje se da je veliki broj, često brzo promenljivih, signala različite prirode (električni signali, savremen telekomunikacioni saobraćaj, meteorološki i biomedicinski signali) moguće opisati na sličan način. Za iskazivanje izrazitih varijabilnosti neophodno je ispitati fraktalne karakteristike. Korišćenje klasičnih statističkih metoda u takvom slučaju (srednje vrednosti) moglo bi prouzrokovati greške u proceni. Na izrazite singularitete ukazuje multifraktalnost procesa.

LITERATURA

- [1] B. Mandelbrot, *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*, 1975
- [2] M.Turner, J.Blackledge, P.Andrews: *Fractal Geometry in Digital Imaging*, Academic Press, 1998
- [3] H.Peitgen, H.Jurgens, P.Andrews *Chaos and Fractals*, Springer, 1992
- [4] J. L. Vehel, "Introduction to the multifractal analysis of images", <http://www-rocq.inria.fr/fractales>, 1996
- [5] K. Uma, K. R. Ramakrishnan, G. Ananthkrishna, "Image analysis using multifractals", in *Proc. IEEE Conf. ICASSP-96*, Vol. 4, pp. 2188-2190, Atlanta (USA), May 1996.
- [6] I. Reljin, B. Reljin, I. Rakočević, N. Mastorakis, "Image content described by fractal parameters", in *Recent Advances in Signal Processing and Communications*, pp. 31-34, N. Mastorakis (Ed.), World Scientific Press, Danvers, MA, 1999.
- [7] B. Reljin, I. Reljin, I. Pavlović, I. Rakočević, "Fraktalna analiza medicinskih slika", *Zbornik Informatika u medicini i farmaciji*, IMF-99, pp. 49-53, Aranđelovac, 26-28. okt. 1999.
- [8] I. Reljin, B. Reljin, I. Rakočević, "Analiza fraktalnih karakteristika slika", *Zbornik 43. Konf. ETRAN*, Zlatibor, 20-23. sept. 1999.
- [9] B. Reljin, I. Reljin, I. Pavlović, I. Rakočević, "Fraktalna analiza medicinskih slika", *Zbornik konf. IMF-99*, str. 49-53, Aranđelovac, 26-28 okt., 1999.
- [10] B. Reljin, I. Pavlović, I. Reljin, I. Rakočević, "Multifraktalna analiza medicinskih slika", *Zbornik VII konf. TELFOR-99*, str. 469-472, Beograd, 23-25 nov. 1999.

- [11] I. Reljin, B. Reljin, I. Pavlović, I. Rakočević, "Multifractal analysis of gray-scale images", in *Proc. IEEE 10th Mediterranean Electrotechnical Conference, MELECON-2000*, Vol. II, pp. 490-493, Lemesos, Cyprus, May 29-31, 2000.
- [12] W. Willinger, M. Taqqu, R. Sherman, D. Wilson, "Self-similarity through high-variability: Statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level", in *Proc. ACM/Sigcomm '95*.
- [13] M. Taqqu, V. Teverovsky, W. Willinger, "Estimators for long-range dependence: An empirical study", *Fractals*, Vol. 3, No. 4, pp. 785-788, 1995.
- [14] M. Crovella, M. Taqqu, A. Bestavros, "Heavy-tailed probability distributions in the World Wide Web", in *A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques for Analyzing Heavy Tailed Distributions*, R. Adler, R. Feldman, M. Taqqu (Eds.), Birkhauser, Boston (MA), 1996.
- [15] P. Mannersalo, I. Norros, "Multifractal analysis: A potential tool for teletraffic characterization?", *COST257TD(97)32*, pp. 1-17, 1997.
- [16] P. Mannersalo, I. Norros, "Multifractal analysis of real ATM traffic: A first book", *COST257TD(97)19*, pp. 1-8, 1997.
- [17] I. Reljin, "Pareto models for the neural network scheduled ATM streams", *TELFOR 98*, pp. 31-34, Beograd, Nov. 1998.
- [18] I. Reljin, "Neuralne mreže u kontroli ATM multipleksa: Izrađivanje Hurst-ovog indeksa", *Zbornik 42. Konf. ETRAN-98*, Vrnjačka Banja, juni 1998.
- [19] I. Reljin, B. Reljin, M. Stanojević, "Performances of the multiplexed Pareto streams", in *Proc. 4th Int. Conf. on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services (TELSIKS'99)* IEEE, Vol.2, pp. 528-531, Niš (Yugoslavia), Oct. 13-15, 1999.
- [20] I. Reljin, B. Reljin, "Fraktalna analiza signala pri prenosu kroz ožrađeno PCS vlakno", *44. konf. ETRAN*, Soko Banja, 26-29 juni, 2000.
- [21] I. Reljin, M. Stanojević, B. Reljin, "Fractal/multifractal nature of outgoing ATM multiplexer processes" (in Serbian), *Journal INFO Science*, Vol. 8, No. 2, pp. 10-16, May 2000.
- [22] I. Reljin, B. Reljin, "Neurocomputing in teletraffic: Multifractal spectrum approximation", (invited paper), in *Proc. 5th Seminar NEUREL-2000*, IEEE, pp. 24-31, Belgrade (YU), Sept. 25-27, 2000.
- [23] B. Reljin, I. Reljin, "Multimedia: The impact on the teletraffic", in *Book 2*, N. Mastorakis (Ed.), World Scientific and Engineering Society Press, Clearance Center, Danvers, MA, 2000, pp. 366-373.
- [24] M. Stanojević, I. Reljin, B. Reljin, "Fraktalne karakteristike drmskog saobraćaja", *44. konf. ETRAN*, Soko Banja, 26-29 juni, 2000.
- [25] A. Davis, A. Marshak, W. Wiscombe, "Bi-multifractal analysis and multi-affine modeling of non-stationary geophysical processes, application to turbulence and clouds", *Fractals*, Vol. 1, No. 3, pp. 560-567, 1993.
- [26] A. Davis, A. Marshak, W. Wiscombe, R. Calahan, "Multifractal characterizations of nonstationarity and intermittency in geophysical fields: Observed, retrieved or simulated", *J. of Geophysical Research*, Vol. 99, No. D4, pp. 8055-8072, 1994.
- [27] I. Reljin, G. Jovanovic, B. Reljin, "The climate signal analysis through linear and non-linear methods", *Proceedings of the XI ISTET'01*, Linz, Aug. 2001.
- [28] G. Jovanović, I. Reljin, B. Reljin, "Multifractal analysis of El Nino influence", in *Proc. Conference on Non-linear Phenomena in Global Climate Dynamics*, The Abdus Salam International Center for Theoretical Physics, Trieste, Italy, September 26-29, Sept., 2000.
- [29] I. Reljin, B. Reljin, G. Jovanović, "Multifractal analysis of El Nino climate influence", *First Balkan Conference on Signal Processing, Communications, Circuits and Systems*, Balkan '2000, in Conference CD, Istanbul (Turkey), June 2-3, 2000.
- [30] I. Reljin, G. Jovanović, B. Reljin, "Analiza polja temperatura i padavina u SR Jugoslaviji primenom empirijskih ortogonalnih funkcija", *Zbornik 45. konf. ETRAN*, Arandjelovac, Juni, 2001.
- [31] G. Jovanović, I. Reljin, B. Reljin, "EOF analiza polja temperatura u SR Jugoslaviji", *Zbornik Informacione Technologije, IT-2001*, Žabljak, pp. 162-166, mart, 2001.
- [32] G. Jovanović, I. Reljin, B. Reljin, "Telekonekcija: El Ninjo - temperature u Srbiji", *Zbornik Informacione Technologije, IT-2000*, Žabljak, pp. 45-49, 28 feb. - 6 mart, 2000.
- [33] S. Buldyrev, A. Goldberger, S. Havlin, C. Peng, H. Stanley, "Fractals in biology and medicine: From DNA to heartbeat", in A. Bunde, S. Havlin (Eds.), *Fractals in Science*, pp. 49-87, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [34] E. Bulmore, M. Brammer, I. Harvey, R. Persaud, R. Muray, M. Ron, "Fractal analysis of the boundary between the white matter and cerebral cortex in magnetic resonance images: A controlled study of schizophrenic and manic-depressive patients", *Psychological Medicine*, Vol. 24, pp. 771-781, 1994.
- [35] M. Cook, S. Free, M. Manfold, D. Fish, S. Shorvon, J. Stevens, "Fractal description of cerebral cortical patterns in frontal lobe epilepsy", *Eur. Neurology*, Vol. 35, pp. 327-335, 1995.
- [36] S. Cross, "Fractals in pathology" (review article), *J. of Pathology*, Vol. 182, pp. 1-8, 1997.
- [37] A. Einstein, H-S. Wu, M. Sanchez, J. Gil, "Fractal characterization of chromatin appearance for diagnostic in breast cytology", *J. of Pathology*, Vol. 185, pp. 366-381, 1998.
- [38] R. Sedivy, R. Mader, "Fractals, chaos and cancer: Do they coincide?", *Cancer Investigation*, Vol. 15, No. 6, pp. 601-607, 1997.
- [39] P. Mannersalo, A. Koski, I. Norros, "Telecommunication networks and multifractal analysis of human population distribution", *COST257TD(98)2*, pp. 1-15, 1998.
- [40] F. Hausdorff, "Dimension und äusseres Mass", *Math. Ann.*, Vol. 79, pp. 157-179, 1919.
- [41] M. Goodchild, "Fractals and the accuracy of geographical measure", *Math. Geology*, Vol. 12, No. 2, pp. 85-98, 1980.
- [42] B. Reljin, I. Reljin, I. Pavlović, I. Rakočević, "Hibridni metod izrađivanja fraktalne dimenzije digitalnih slika", *Zbornik VII konf. TELFOR-99*, str. 473-476, Beograd, 23-25 nov. 1999.
- [43] C. Evertsz, B. Mandelbrot: "Multifractal Measures", Appendix B in H. Peitgen, H. Jurgens, P. Andrews *Chaos and Fractals*, Springer, 1992.
- [44] B. Gammel, *Multifractals*, http://www.physik.tu-muenchen.de:81/lehrstuehle/T32/matpack/html/matpack_frame.html, Sep 1996.
- [45] B. Gammel, *Matpack Library Release 1.4*, Jan 1999, <http://www.physik.tu-muenchen.de:81/.../Falpha/>
- [46] A. Chhabra, R. V. Jensen, "Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 62, 1327, 1989.
- [47] B. Mandelbrot, "Negative fractal dimensions and multifractals", *Physica A*, Vol. 163, pp. 306-315, 1990.
- [48] N. Japundžić i Žigon, "Doprinos kompjuterske metodologije u otkrivanju porekla i značaja brzog kardiovaskularnog varijabiliteta", prihvaceno za 13. Kongres kardiologa Jugoslavije, Novi Sad, 17-20. oktobar 2001.

Abstract: The paper considers different signal analyses based on the fractal and multifractal points of view. It was shown that multifractal spectrum permits both local and global signal analysis irrespective of the signal nature. The $(\alpha, f(\alpha))$ space can be used as a powerful, efficient and robust tool in different signal analyses, object classification and separation, too.

FRactal AND MULTIFRACTAL SIGNAL ANALYSIS
Branimir Reljin, Irini Reljin