

PRILOG NUMERIČKOM IZRAČUNAVANJU RASPODELE STRUJE I ULAZNE ADMITANSE ASIMETRIČNOG DIPOLA

Nikolić B., Rančić M., Cvetković N., Rančić P.
Elektronski fakultet u Nišu

I UVOD

Problem određivanja nepoznate raspodele struje na provodnicima žičane strukture, koja je pobuđena prosto-periodičnom eksitacijom, predstavlja jedan od centralnih problema pri modelovanju EM polja žičanih struktura različite namene.

Za rešavanje ovog problema postoji veliki broj metoda od kojih jedan broj polazi od zadovoljenja graničnih uslova za tangencijalno električno polje, a jedan broj od zadovoljenja graničnih uslova za magnetno polje na površini provodnika žičane strukture. Rezultat zadovoljenja ovih graničnih uslova su sistemi integralnih jednačina za električno polje (Electric Field Integral Equations - EFIE), odnosno sistem integralnih jednačina za magnetno polje (Magnetic Field Integral Equations - MFIE) ([1], [2], [3] i dr).

Jedan broj integralnih jednačina se dobija evoluiranjem iz graničnog uslova za tangencijalno električno polje kada se ovo izrazi preko komponentata magnetnog vektor potencijala, što dovodi do nehomogenih diferencijalnih jednačina čije rešenje u implicitnoj formi predstavlja sistem integralnih jednačina tzv. Hallen-ovog tipa. U literaturi su poznate različite forme ovih sistema integralnih jednačina ([4], [5], [6] i dr). Pri ovom rešavanju Lorentz-ov uslov kontinuiteta potencijala se koristi samo u delu da se izračuna jedan broj nepoznatih konstanti integracije.

Ako se granični uslov da rezultujuće tangencijalno električno polje, izraženo preko komponenti za magnetni vektor potencijal (ili Hertz-ov vektor potencijal) i električnog skalar potencijala, paralelno napiše sa Lorentz-ovim uslovom, tada se dobija sistem parcijalnih nehomogenih diferencijalnih jednačina tipa telegrafičara, u kome naponu na vodu odgovara potencijal na površini provodnika, a struji odgovara tangencijalna komponenta Hertz-ovog vektora (odnosno magnetnog vektor potencijala) sračunate na površini žičanog provodnika.

Rešenja ovog sistema diferencijalnih jednačina su rešenja za električni skalar potencijal (SIJ - $H\phi$) i tangencijalnu komponentu Hertz-ovog vektor potencijala (SIJ - $H\Pi$) sračunati na površini žičane strukture, i u implicitnoj formi predstavljaju sistem integralnih jednačina za nepoznate raspodele struja.

Za dalja numerička rešavanja najčešće je korišćen sistem integralnih jednačina SIJ - $H\Pi$, odnosno rešenje koje proizilazi iz rešenja za tangencijalnu komponentu Hertz-ovog vektora (odnosno magnetnog vektor potencijala), dok je drugi par rešenja sistema integralnih jednačina za nepoznatu raspodelu struje, koji proističe iz rešenja za električni skalar potencijal (SIJ - $H\phi$), korišćen samo u delu da se odredi jedan broj nepoznatih konstanti integracije ([8], [7]).

U ovom radu je prezentovan obrnut pristup. Rešava se sistem integralnih jednačina koji proizilazi iz rešenja za električni skalar potencijal (SIJ - $H\phi$), a rešenje za tangencijalnu komponentu Hertz-ovog vektor potencijala (SIJ - $H\Pi$) služi da se odredi jedan broj nepoznatih konstanti integracije.

Za numeričko rešavanje ovog sistema integralnih jednačina (SIJ - $H\phi$) korišćena su dva metoda:

- Metod podešavanja u tačkama sa polinomskom aproksimacijom za nepoznatu raspodelu struje ([4]); i
- Metod minimiziranja srednje-kvadratne greške sa sin-cos aproksimacijom za nepoznatu raspodelu struje ([10]).

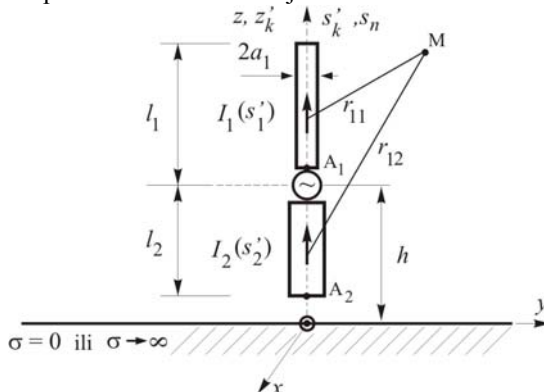
Ceo postupak je ilustrovan na problemu usamljenog asimetričnog dipola u vazduhu koji je napajan idealnim naponskim generatorom. Iza toga je dat jedan broj numeričkih rezultata za ulaznu admitansu kojim se ilustruje valjanost korišćenog modela i oblik aproksimacije za struje.

II KRATAK TEORIJSKI OPIS

II.1 OPIS GEOMETRIJE

Posmatra se prava asimetrična dipol antena (ADA), dužine krakova l_1 (gornji) i l_2 (donji), koji su kružnog poprečnog preseka poluprečnika a_k , $a_k \ll l_k$ i $a_k \ll \lambda_0$, $k=1,2$ (λ_0 - talasna dužina u vazduhu).

Dipol se napaja idealnim naponskim generatorom napona U i kružne frekvencije $\omega = 2\pi f$. Nepoznate raspodele struja su lokalizovane duž ose provodnika i označene sa $I_k(s'_k)$, $0 \leq s'_k \leq l_k$, $z'_k = z_{Ak} + s'_k$, $k=1,2$. Geometriji dipola pridružen je koordinatni sistem kao na Slici 1, pri čemu je, u opštem slučaju, dipol usamljen u vazduhu, ili se nalazi iznad idealno provodne ravni na visini $h \geq l_2$. Ovo poslednje se u matematičkom modelu lako iskazuje, ili se prethodni model dobija ako se stavi da $h \rightarrow \infty$.



Slika 1. Šematska ilustracija pravog asimetričnog dipola.

II.2 HERTZ-OV VEKTOR I ELEKTRIČNI SKALAR POTENCIJAL

Hertz-ov vektor potencijal ima samo z -komponentu, $\vec{\Pi}_0(\vec{r}) = \Pi_{z0} \hat{z}$ i dat je izrazom

$$\Pi_{z0} = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \sum_{k=1}^2 \int_{s'_k=0}^{l_k} I_k(s'_k) [K_0(r_{1k}) + bK_0(r_{2k})] ds'_k, \quad (1)$$

gde je $\sigma_0 = j\omega\varepsilon_0$ - kompleksna specifična provodnost, $K_0(r_{ik}) = \exp(-\gamma_{\underline{0}} r_{ik})/r_{ik}$ - standardno jezgro potencijala, $\gamma_{\underline{0}} = j\beta_0 = (j\omega\mu_0\sigma_0)^{1/2}$ - kompleksna konstanta prostiranja u vazduhu, r_{ik} - rastojanja od strujnog elementa do posmatrane tačke i b -aditivna konstanta ($b=0$ - ADA usamljena u vazduhu, $b=1$ - ADA iznad idealno provodne ravni).

Električni skalar potencijal u okolini antene, $\varphi_0 = -\text{div}\vec{\Pi}_0$, dat je izrazom

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \sum_{k=1}^2 \int_{s'_k=0}^{l_k} I_k(s'_k) \frac{\partial}{\partial s'_k} [K_0(r_{1k}) - bK_0(r_{2k})] ds'_k. \quad (2)$$

II.3 SISTEM INTEGRALNIH JEDNAČINA HALLEN-OVOG TIPRA (SIJ- Π i SIJ- φ)

Sistemi integralnih jednačina SIJ- Π i SIJ- φ u implicitnoj formi redom je dat sledećim rešenjima

$$\Pi_{z0}(s_n) = \frac{\pi_n}{4\pi\sigma_0} ch\gamma_{\underline{0}} s_n - \frac{V_{en}}{\gamma_{\underline{0}}} sh\gamma_{\underline{0}} s_n, \quad (3)$$

$$\varphi_0(s_n) = -\frac{\gamma_{\underline{0}}}{4\pi\sigma_0} \pi_n sh\gamma_{\underline{0}} s_n + V_{en} ch\gamma_{\underline{0}} s_n, \quad (4)$$

gde su π_n i V_{en} nepoznate konstante integracije, $0 \leq s_n \leq l_n$, $n=1,2$, a potencijali $\Pi_{z0}(s_n)$ i $\varphi_0(s_n)$ se sračunavaju pomoću (1) i (2) u tačkama na površini provodnika duž izvodnice s_n , $n=1,2$. Konstante π_n su prema (3) određene pomoću (1), tj. $\pi_n = \Pi_{z0}(s_n=0)$, $n=1,2$ - vrednost Hertz-ovog vektora na proizvoljno izabranom početku provodnika, što su prema **Slici. 1** tačke A_1 i A_2 .

Za određivanje nepoznate raspodele struja koristi se SIJ- φ , tj. jednačine (4). Nepoznate konstante V_{en} , $n=1,2$, s obzirom na uveden model napajanja, zadovoljavaju jednačinu

$$V_{e1} + j30\pi_2 \sin\beta_0 l_2 - V_{e2} \cos\beta_0 l_2 = U = 1V. \quad (5)$$

Nepoznate raspodele struja se predstavljaju u obliku aproksimativnog polinoma sa nepoznatim kompleksnim strujnim koeficijentima

$$I_k(s'_k) = \sum_{m=0}^{M_k} A_{km} \left(\frac{s'_k}{l_k} \right)^m, \quad k=1,2, \quad (6)$$

ili u obliku sinus-kosinus aproksimativne funkcije

$$I_k(s'_k) = I_{0k} + I_{1k} e^{-\gamma_{\underline{0}}(l_k-s'_k)} + I_{Rk} e^{\gamma_{\underline{0}}(l_k-s'_k)}, \quad k=1,2. \quad (7)$$

Nepoznate raspodele struja zadovoljavaju sledeće uslove:

$$I_1(l_1) = 0, \quad \text{ili} \quad (8a)$$

$$I_1(l_1) = -a_1 I'_1(l_1), \quad (8b)$$

$$I_2(0) = 0, \quad \text{ili} \quad (9a)$$

$$I_2(0) = -a_2 I'_2(0), \quad (9b)$$

$$I_1(0) = I_2(l_2). \quad (10)$$

Nepoznati strujni koeficijenti polinoma u (6) određuju se rešavanjem sistema algebarskih jednačina koji se formira, vodeći računa o uslovima (8) - (10), metodom podešavanja u sledećim tačkama:

$$s_{ni} = l_n \frac{i}{M_n + 1}, \quad i=1,2,\dots,M_n, \quad n=1,2.$$

Nepoznati strujni koeficijenti u (7) se određuju metodom srednje-kvadratne greške formiranjem funkcionala koji se standardnom procedurom minimizira, tj. funkcional srednje-kvadratne greške u proizvoljnom broju tačaka N je oblika:

$$F = \sum_{i=1}^N [\varphi_0(I_{0k}, I_{1k}, I_{Rk}, s_{ni}) + j30\pi_n \sin\beta_0 s_{ni} - V_{en} \cos\beta_0 s_{ni}]^2 + \lambda_1 I_1(l_1) + \lambda_2 I_2(0) + \lambda_3 [I_1(0) - I_2(l_2)] + \lambda_4 [\varphi_0(s_1=0) - \varphi_0(s_2=l_2) - U], \quad (11a)$$

$$F = \sum_{i=1}^N [\varphi_0(I_{0k}, I_{1k}, I_{Rk}, s_{ni}) + j30\pi_n \sin\beta_0 s_{ni} - V_{en} \cos\beta_0 s_{ni}]^2 + \lambda_1 [I_1(l_1) + a_1 I'_1(l_1)] + \lambda_2 [I_2(0) + a_2 I'_2(0)] + \lambda_3 [I_1(0) - I_2(l_2)] + \lambda_4 [\varphi_0(s_1=0) - \varphi_0(s_2=l_2) - U]. \quad (11b)$$

Funkcional (11a) uključuje uslove (8a) i (9a), a (11b) uslove (8b) i (9b). Tačke u kojima se minimizira vrednost srednje-kvadratne greške izabrane su na sledeći način:

$$s_{ni} = l_n \frac{i}{N+1}, \quad i=1,2,\dots,N.$$

Nepoznati strujni koeficijenti I_{0k}, I_{1k}, I_{Rk} , $k=1,2$ i λ_i , $i=1,2,3,4$, određuju se rešavanjem sistema algebarskih jednačina, koji se dobija variranjem funkcionala, tj.

$$\frac{\partial F}{\partial I_{0k}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial I_{1k}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial I_{Rk}} = 0, \quad k=1,2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i=1,2,3,4.$$

III NUMERIČKI REZULTATI

Na osnovu opisanih matematičkih modela formirani su paketi programa za numerička izračunavanja i to za polinomsku raspodelu struje u Fortran-u, a za sin-cos raspodelu u programskom paketu Matematica 3.0. Iz većeg broja numeričkih eksperimenata dati su rezultati za ulaznu admitansu simetričnog dipola usamljenog u vazduhu poluprečnika $a = a_1 = a_2 = 0.007022\lambda_0$ i dužina kraka $l = l_1 = l_2 = 0.250\lambda_0$; $0.375\lambda_0$ i $0.500\lambda_0$ ([11]).

Rezultati su sređeni tabelarno i prikazani u **Tabelama 1, 2 i 3**. Pri polinomskoj aproksimaciji korišćen je isti stepen polinoma i na jednom i na drugom kraku dipola, tj. $M_1 = M_2 = M$.

Tabela 1 - Ulazna admitansa, $Y_u = G_u + jB_u$ [mS], usamljene simetrične dipol antene poluprečnika $a = 0.007022 \lambda_0$ i dužine kraka $l = 0.250 \lambda_0$.

N	M+1	Sin-cos aproksimacija		Polinomska aproksimacija		Popović [3]
		uslovi (8a) i (9a)	uslovi (8b) i (9b)	uslovi (8a) i (9a)	uslovi (8b) i (9b)	
3	3	10.49 - j 1.87	8.97 - j 2.77	9.64 - j 3.52	9.30 - j 3.68	9.16 - j 3.57
4	4	10.39 - j 2.16	8.87 - j 2.92	9.84 - j 3.40	9.60 - j 3.53	9.16 - j 3.55
5	5	10.32 - j 2.38	8.79 - j 3.02	9.50 - j 3.31	9.30 - j 3.41	8.81 - j 3.31
6	6	10.27 - j 2.56	8.74 - j 3.10	9.38 - j 3.44	9.26 - j 3.51	
7	7	10.22 - j 2.72	8.70 - j 3.17	9.14 - j 3.34	9.06 - j 3.39	
8	8	10.18 - j 2.86	8.66 - j 3.22	9.08 - j 3.39	9.09 - j 3.41	
9	9	10.14 - j 2.98	8.63 - j 3.27	8.91 - j 3.30	9.00 - j 3.31	
10	10	10.1 - j 3.09	8.61 - j 3.30	8.87 - j 3.32	9.07 - j 3.30	
11	11	10.07 - j 3.19	8.58 - j 3.34	8.75 - j 3.24	9.05 - j 3.30	
Mack [11]		8.92 - j 3.46	8.92 - j 3.46	8.92 - j 3.46	8.92 - j 3.46	8.92 - j 3.46

Tabela 2 - Ulazna admitansa, $Y_u = G_u + jB_u$ [mS], usamljene simetrične dipol antene poluprečnika $a = 0.007022 \lambda_0$ i dužine kraka $l = 0.375 \lambda_0$.

N	M+1	Sin-cos aproksimacija		Polinomska aproksimacija		Popović [3]
		uslovi (8a) i (9a)	uslovi (8b) i (9b)	uslovi (8a) i (9a)	uslovi (8b) i (9b)	
3	3	1.38 - j 0.40	1.31 - j 0.28	1.44 - j 0.56	1.40 - j 0.52	1.52 - j 0.36
4	4	1.35 - j 0.39	1.33 - j 0.27	1.45 - j 0.50	1.42 - j 0.46	1.54 - j 0.27
5	5	1.40 - j 0.38	1.34 - j 0.26	1.46 - j 0.44	1.43 - j 0.40	1.53 - j 0.10
6	6	1.40 - j 0.37	1.34 - j 0.25	1.47 - j 0.40	1.45 - j 0.37	
7	7	1.41 - j 0.36	1.35 - j 0.24	1.48 - j 0.30	1.45 - j 0.26	
8	8	1.41 - j 0.35	1.35 - j 0.24	1.48 - j 0.26	1.46 - j 0.24	
9	9	1.41 - j 0.35	1.36 - j 0.23	1.48 - j 0.18	1.47 - j 0.16	
10	10	1.42 - j 0.34	1.36 - j 0.23	1.49 - j 0.15	1.47 - j 0.13	
11	11	1.42 - j 0.34	1.36 - j 0.23	1.49 - j 0.09	1.47 - j 0.07	
Mack [11]		1.58 - j 0.18	1.58 - j 0.18	1.58 - j 0.18	1.58 - j 0.18	1.58 - j 0.18

Tabela 3 - Ulazna admitansa, $Y_u = G_u + jB_u$ [mS], usamljene simetrične dipol antene poluprečnika $a = 0.007022 \lambda_0$ i dužine kraka $l = 0.500 \lambda_0$.

N	M+1	Sin-cos aproksimacija		Polinomska aproksimacija		Popović [3]
		uslovi (8a) i (9a)	uslovi (8b) i (9b)	uslovi (8a) i (9a)	uslovi (8b) i (9b)	
3	3	0.74 + j 1.44	0.73 + j 1.53	0.84 + j 1.46	0.83 + j 1.50	0.98 + j 1.54
4	4	0.75 + j 1.45	0.74 + j 1.55	0.85 + j 1.43	0.84 + j 1.46	0.96 + j 1.58
5	5	0.77 + j 1.46	0.76 + j 1.56	0.84 + j 1.37	0.83 + j 1.40	0.97 + j 1.76
6	6	0.78 + j 1.48	0.77 + j 1.57	0.87 + j 1.41	0.86 + j 1.43	
7	7	0.79 + j 1.48	0.77 + j 1.58	0.89 + j 1.50	0.88 + j 1.52	
8	8	0.79 + j 1.49	0.78 + j 1.59	0.90 + j 1.54	0.89 + j 1.55	
9	9	0.80 + j 1.50	0.78 + j 1.59	0.91 + j 1.60	0.90 + j 1.61	
10	10	0.80 + j 1.50	0.79 + j 1.60	0.92 + j 1.63	0.91 + j 1.64	
11	11	0.80 + j 1.51	0.79 + j 1.60	0.92 + j 1.68	0.92 + j 1.69	
Mack [11]		1.02 + j 1.68	1.02 + j 1.68	1.02 + j 1.68	1.02 + j 1.68	1.02 + j 1.68

IV ZAKLJUČAK

U ovom radu je za električni skalar potencijal korišćeno rešenje označeno kao SIJ - $H\phi$ ([9]), tj. sistem integralnih jednačina koji proističe iz rešenja sistema nehomogenih parcijalnih diferencijalnih jednačina za potencijale (električni skalar potencijal i tangencijalnu komponentu magnetnog vektor potencijala). Ova rešenja važe na površini provodnika i označena su kao SIJ - $H\Gamma$ i SIJ - $H\phi$, i za dalja numerička rešavanja skoro je redovno korišćen oblik SIJ - $H\Gamma$ ([1]-[8] i dr).

Za numeričko rešavanje sistema integralnih jednačina SIE - $H\phi$, u ovom radu su korišćena dva metoda:

- Metod podešavanja u tačkama sa polinomskom aproksimacijom za nepoznate raspodele struja ([4]); i
- Metod minimiziranja srednje-kvadratne greške sa sin-cos aproksimacijom za struje.

Pri numeričkom rešavanju sistema integralnih jednačina SIJ - $H\phi$ korišćena su dva uslova za raspodelu struje na slobodnim krajevima provodnika. Prvi, koji se uobičajeno koristi, tj. anuliraju se struje na slobodnim krajevima provodnika, i drugi, koji raspodelu struje na slobodnom kraju provodnika modeluje prema polusferičnom završetku, odnosno izjednačavanjem gustine struje na polusferičnom završetku i gustine struje na kraju cilindričnog dela provodnika ([12]). Ovaj uslov je u literaturi tačnije modelovan, na pr. u Ref. [10].

Na osnovu prikazanih numeričkih rezultata za ulaznu admitansu pravog simetričnog dipola se može zaključiti da postoji:

- Zadovoljavajuće slaganje rezultata dobijenih predloženim metodom i modelom sa rezultatima drugih autora ([3], [4] i [11]); i
- Zadovoljavajuća stabilnost rezultata za ulaznu admitansu analiziranih antena sa porastom stepena aproksimativnog polinoma i porastom broja tačaka podešavanja srednje-kvadratne greške.

V LITERATURA

- [1] Harrington R. F., *Field Computation by Moment Methods*, Mc Millan, New York, 1968.
- [2] Mitra R., *Computer Techniques for Electromagnetics*, New York, Pergamon Press, 1973.
- [3] Popović B. D., Dragović M.B., Djordjević A. R., *Analysis and Synthesis of Wire Antennas*, RSP, John Willey & Sons LTD, Chichester, England, 1982.
- [4] Popović B. D., *On Polynomial Approximation of Current Along Thin Asymmetrical Cylindrical Dipoles*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-19, No.1, January 1972.
- [5] Kominami M., Rokushima K., *On the Integral Equ-*

ation and Piecewise Linear Antennas, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-29, No.5, September, 1981.

- [6] Mei K. K., *On the Integral Equations of Thin Wire Antennas*, IEEE Antennas and Propagation, Vol. AP-13, pp. 374-378, May 1965.
- [7] Rančić P. D., *Contribution to the Antenna Analysis Based on Mei's Type Integral Equation*, Proc. of XXIII Jug. Conference ETAN'79, Vol. II, pp.473-480, Maribor, June 11-15, 1979.
- [8] Rančić P. D., *Contribution to Linear Antennas Analysis by New Forms of Systems of Integral Equations of two Potentials*, 10th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields COMPUMAG'95, pp. 328-329, Berlin, Germany, July 10-13, 1995.
- [9] Rančić P. D., Kitanović M. I., Stevanović Z. D., *O nekim mogućnostima korišćenja sistema integralnih jednačina dva potencijala*, XL Konferencija za ETRAN, pp. 367-370, Budva, 4-7. Juna, 1996.
- [10] Dragović M. B., *Prilog sintezi cilindričnih antena sa koncentrisanim opterećenjima*, doktorska disertacija, Beograd, 1979.
- [11] Mack R. B., *A study of circular arrays*, Cruft Laboratory, Harvard University, Technical Reports 382 and 383, 1963.
- [12] Rančić P. D., *A simple Condition for Current Distribution on the Free Terminal of the Linear Antenna Conductors*, Proc. of XXXV Conference ETAN, Vol. V, pp. 221-224, Ohrid, June, 1991.

Abstract: In this paper for electrical scalar potential the solution marked as SIJ - $H\phi$ ([9]) is used, i.e. the system of integral equations which is derived from the solutions of nonhomogeneous partial differential equations for potentials (electrical scalar potential and tangential component of magnetic vector potential). For solving this system of integral equations, two methods are used: one is Point matching method with polynomial approximation of unknown current distributions and the second one is the Least squares method with sin-cos current approximation.

From the numerical results shown above, it can be concluded that a good stability of values of the input admittances with polynomial degree and number of fitting increasing, exists. Also, there is a good agreement with the results of other authors ([3], [4] and [11]).

CONTRIBUTION TO NUMERICAL CALCULATION OF CURRENT DISTRIBUTION AND INPUT ADMITTANCE OF ASYMMETRICAL DIPOLE

Nikolić B., Rančić M., Cvetković N., Rančić P.